WS 2005/06
Prof. Dietmar Hömberg
Daniela Kern

Technische Universität Berlin
Fakultät II
Institut für Mathematik

7. Übung zur LV Nichtlineare Optimierung

Theoretische Aufgaben: (Abgabe in der Vorlesung am 16.12.05)

1. (2 Punkte)
   Sei $x \in \mathbb{R}^n$ gegeben. Zeigen Sie: Die Lösung des Problems

   $$\min_{u \in \mathbb{R}^n} \frac{1}{2}\|x-u\|_2^2, \qquad Au = 0$$

   ist gegeben durch $u = (I - A^T(AA^T)^{-1}A)x$. Dabei ist $A \in \mathbb{R}^{m\times n}, m < n$ mit vollem Rang, rang $A = m$.

2. (2+3 Punkte)
   Wir betrachten das Optimierungsproblem

   $$\min_{x \in \mathbb{R}^n} \frac{1}{2}x^T Hx - b^T x, \qquad Ax = y$$

   mit $A \in \mathbb{R}^{m\times n}, m < n, \mathrm{Rang}\, A = m$ und $H \in \mathbb{R}^{n\times n}$ symmetrisch positiv definit.

   (a) Geben Sie die Lagrangefunktion und die notwendigen Optimalitätsbedingungen erster Ordnung des unrestringierten Problems an. Ist jeder stationäre Punkt auch ein lokales Minimum?

   (b) Zeigen Sie: Die Matrix

   $$\begin{pmatrix} H & A^T \\ A & 0 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{(n+m)\times(n+m)}$$

   ist regulär. Kann man die Voraussetzungen an H abschwächen?

3. (3 Punkte) Untersuchen Sie folgendes Minimierungsproblem mit Ungleichungsnebenbedingungen:

   $$\begin{cases} \min f(x) = 10(x_1 - 3.5)^2 + 20(x_2 - 4)^2 & \\ x_1 + x_2 \le 6 & x_1 - x_2 \le 1 \\ 2x_1 + x_2 \ge 6 & 0.5x_1 - x_2 \ge 1 \\ x_1 \ge 1 & x_2 \ge 1. \end{cases}$$

   Stellen Sie mittels geometrischer Überlegungen eine Hypothese über die Lösung der folgenden Aufgabe auf, und überprüfen Sie diese mit Hilfe analytischer Mittel.

Programmieraufgabe: (per email bis zum 16.12.05)
Programmieren Sie das CG-Verfahren aus der Vorlesung.
Wenden Sie das Verfahren auf die bereits wohlbekannten Funktionen vom 4. Übungsblatt (Rosenbrock, Beale, Spellucci) an, um die Funktionstüchtigkeit Ihres Programms zu überprüfen.
(8 Punkte)