WS 2005/06 Technische Universität Berlin
Prof. Dietmar Hömberg Fakultät II
Daniela Kern Institut für Mathematik

9. Übung zur LV Nichtlineare Optimierung

Theoretische Aufgaben: (Abgabe in der Vorlesung am 13.01.06)

1. (3 Punkte) Untersuchen Sie folgendes Minimierungsproblem mit Ungleichungsnebenbedingungen:
$$\begin{cases} \min f(x) = 10(x_1 - 3.5)^2 + 20(x_2 - 4)^2 & \\ x_1 + x_2 \le 6 & x_1 - x_2 \ge 1 \\ 2x_1 + x_2 \ge 6 & 0.5x_1 - x_2 \le 1 \\ x_1 \ge 1 & x_2 \ge 1. \end{cases}$$
Stellen Sie mittels geometrischer Überlegungen eine Hypothese über die Lösung der Aufgabe auf, und überprüfen Sie diese mit Hilfe analytischer Mittel.

2. (2 Punkte) Als Vorbereitung für einen Teil der nächsten Aufgabe betrachten wir das Problem der Projektion auf eine konvexe Menge. Gegeben sei eine konvexe, abgeschlossene und nichtleere Menge $C \subset \mathbb{R}^n$ und ein Punkt $y \in \mathbb{R}^n$. Gesucht ist ein Punkt $x \in C$, der den kleinsten Abstand von y unter allen Punkten von C hat, bzw. der die Aufgabe
$$\min_{x \in C} \|x - y\|_2^2$$
löst.

   Zeigen Sie die Existenz und Eindeutigkeit der Lösung. Wie sieht die notwendige Optimalitätsbedingung aus?

3. (2 Punkte) Wir wenden uns nun (zum wiederholten Male) einer quadratischen Optimierungsaufgabe zu. Allerdings beziehen wir jetzt noch Gleichungs- und Ungleichungsrestriktionen ein:
$$\begin{aligned} \min\ \frac{1}{2}\|y - y_d\|^2 + \frac{\gamma}{2}\|u\|^2 \\ Ay = f + Bu \\ a_i \le u_i \le b_i,\ i = 1 \dots n. \end{aligned} \tag{1}$$
Dabei sind gegeben: $A \in \mathbb{R}^{n,n}$ eine reguläre Matrix, $B \in \mathbb{R}^{n,m}$, $m \le n$ eine Matrix mit vollem Spaltenrang sowie Vektoren $f \in \mathbb{R}^n$ und $a, b \in \mathbb{R}^m$ mit $a_i < b_i$ für alle $i = 1 \dots m$. Weiter sind $y \in \mathbb{R}^n$ und $u \in \mathbb{R}^m$ die gesuchten Größen Zustand und Steuerung. Der Parameter γ ist nichtnegativ.

   Formulieren Sie für das Optimierungsproblem (1) die notwendigen Optimalitätsbedingungen erster Ordnung. Sind diese hinreichend?

   Nutzen Sie dabei die Lagrange-Funktion. Dabei seien λ der Multiplikator für die Gleichungsrestriktion und μ_a, μ_b die Multiplikatoren der beiden Ungleichungsnebenbedingungen.

   Welche Gleichung erhalten wir zur Bestimmung von λ, wenn y bekannt ist?

4. (1+2+2+1 Punkte) Unter den Bedingungen der vorhergehenden Aufgabe:

   (a) Sei u^* die Lösung der Aufgabe mit dazugehörigen $y^*, \lambda^*, \mu_a^*, \mu_b^*$.
   Was kann man über u_i^* sagen, wenn $\mu_{a,i}^* > 0$ bzw. $\mu_{b,i}^* > 0$ ist? Zeigen Sie, daß aus $\mu_{a,i}^* > 0$ folgt $\mu_{b,i}^* = 0$, daß also beide Multiplikatoren nicht gleichzeitig positiv sein können.

   (b) Beweisen Sie die folgende Ungleichung:
$$(\mu_a^* - \mu_b^*)^T (u - u^*) \ge 0 \qquad \forall u \in \mathbb{R}^n : a_i \le u_i \le b_i,\ i = 1 \dots n.$$

(c) Zeigen Sie, daß für $\gamma > 0$, die Projektionsformel

$$u_i^* = \mathrm{Proj}_{[a_i,b_i]}\left(-\frac{1}{\gamma}(B^T\lambda^*)_i\right)$$

gilt, wobei $(B^T\bar{\lambda})_i$ die i-te Komponente von $B^T\lambda^*$ ist.
Hinweis: Folgern Sie aus (c) die Ungleichung

$$(\gamma u^* + B^T\lambda^*)^T(u - u^*) \geq 0, \tag{2}$$

und nutzen Sie die Charakterisierung der Projektion aus Aufgabe 2.

(d) Was lässt sich im Fall $\gamma = 0$ für u_i^* aussagen, wenn $(B^T\lambda)_i^* \neq 0$ ist?