

10. Übung zur LV Nichtlineare Optimierung

Theoretische Aufgaben: (Abgabe in der Vorlesung am 20.01.06)

1. (2 Punkte) Zeigen Sie (vgl. Abschnitt 5.5.2): Ist $K \subset \mathbb{R}^n$ abgeschlossener konvexer Kegel, dann

$$(K^*)^* = K.$$

2. (1 Punkt) Unter den Bedingungen von Definition 5.5.5 seien die Vektoren $a^1, \dots, a^m, \{g^j\}_{j \in J(\bar{x})}$ linear unabhängig. Zu zeigen:

$$\mathcal{A} = \begin{pmatrix} f''(\bar{x}) & A^T & G(\bar{x})^T \\ A & 0 & 0 \\ G(\bar{x}) & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

ist invertierbar.

3. (3 Punkte) Betrachten Sie das restringierte Optimierungsproblem

$$\begin{aligned} \min_{x \in \mathbb{R}^2} \quad & 4(x_1 - 6)^2 + 6(x_2 - 2)^2 \\ & -x_1 - 2x_2 + 8 \geq 0 \\ & -3x_1 - x_2 + 15 \geq 0 \\ & x_1 + x_2 - 1 \geq 0 \\ & x_1, x_2 \geq 0. \end{aligned}$$

Formulieren Sie das Optimalitätssystem und berechnen Sie daraus die Lösung des Problems. (Hinweis: Ermitteln Sie an Hand einer Skizze, welche Restriktionen in der optimalen Lösung \bar{x} aktiv sind.)

Programmieraufgabe: (per email bis zum 20.01.06)

1. (a) (2 Punkte) Verifizieren Sie mittels der von der *Matlab Optimization Toolbox* bereitgestellten Funktion `fmincon` (bzw. `constr`, je nach vorliegender Matlab-Version) das Ergebnis der Aufgabe 1 vom 9. Übungsblatt sowie das Ergebnis der Aufgabe 3 von diesem (10.) Übungszettel.
- (b) (6 Punkte) Betrachten Sie das restringierte Optimierungsproblem

$$\min_{x \in \mathbb{R}^n} \frac{1}{2} x^T Q x + q^T x, \quad Ax = b,$$

mit

$$Q = \begin{pmatrix} 78 & -2 & -12 & -140 \\ -2 & 86 & -4 & 60 \\ -12 & -4 & 72 & -80 \\ -140 & 60 & -80 & 7400 \end{pmatrix}, \quad q = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \\ 4 \end{pmatrix}, \quad A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 1 & 2 \end{pmatrix}, \quad b = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

Führen Sie für dieses Problem mit Hilfe von Matlab das Nullraum-Verfahren aus der Vorlesung (Abschnitt 6.1.1; mit QR-Zerlegung) durch und geben Sie als Zwischenergebnisse die Matrizen H , R , die Nullraummatrix Z und schließlich die Lösung \tilde{x} sowie den zugehörigen Lagrange-Multiplikator λ an.