WS 2005/06
Prof. Dietmar Hömberg
Daniela Kern

Technische Universität Berlin
Fakultät II
Institut für Mathematik

11. Übung zur LV Nichtlineare Optimierung

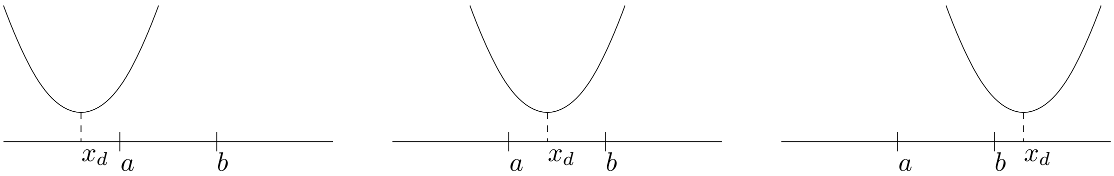
Theoretische Aufgaben: (Abgabe in der Vorlesung am 27.01.06)

1. (4 Punkte)
   Wir betrachten hier die quadratische Optimierungsaufgabe

$$\begin{aligned} \min\ \frac{1}{2}(x-x_d)^T H(x-x_d) \\ a_i \leq x_i \leq b_i. \end{aligned} \tag{1}$$

   Gegeben sind die symmetrische und positiv definite Matrix $H \in R^{n,n}$ sowie Vektoren $a, b \in \mathbb{R}^n$ mit $a_i < b_i$ für alle $i = 1 \dots n$.

   Im Eindimensionalen können die folgenden Situationen auftreten:



   das heisst: die Lösung des Problems (2) im eindimensionalen Fall ist gegeben durch

$$\bar{x} = \mathrm{Proj}_{[a,b]}(x_d),$$

   wobei $\mathrm{Proj}_{[a,b]}(c)$ die Projektion der reellen Zahl c auf das Intervall $[a, b]$ ist.

   Wie sieht das für höherdimensionale Aufgaben aus?

   (a) Berechnen Sie dazu die Lösung des Problems (1) mit

$$H = \begin{pmatrix} 20 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}, \quad x_d = \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \end{pmatrix},$$

   sowie $a = (-1, -1)^T$ und $b = (1, 1)^T$.

   (b) Zeigen Sie, dass die Lösung von (1) die Projektion von x_d auf die zulässige Menge $\{x \in \mathbb{R}^n : a_i \leq x_i \leq b_i,\ i = 1 \dots n\}$ bezüglich des H-Skalarprodukts $(x, y)_H := y^T H x$ ist.

Auf diesem Übungsblatt untersuchen wir ein Verfahren zur Lösung von quadratischen Optimierungsproblemen mit einfachen Beschränkungen:

$$\begin{aligned} \min\ f(x) = \frac{1}{2}x^T H x + c^T x \\ a_i \leq x_i \leq b_i. \end{aligned} \tag{2}$$

Gegeben ist die positiv definite und symmetrische $n \times n$-Matrix H, Vektoren $a, b, c \in \mathbb{R}^n$ mit $a_i < b_i$ für alle i.

Wir führen die Menge der aktiven Ungleichungsnebenbedingungen ein

$$\mathcal{A}(x) := \{i : \ x_i = a_i \text{ oder } x_i = b_i\}.$$

Ein gerne verwendetes Verfahren ist das folgende *Aktive-Mengen-Verfahren*:

`(1)`: Anfangsnäherung x^0 gegeben, setze $k := 0$

`(2)`: Ermittle $\mathcal{A}(x^k)$

`(3)`: Berechne $\tilde{x}^{k+1}$ als Lösung von

$$\begin{aligned} \min\ & \frac{1}{2}x^T Hx + c^T x \\ x_i = x_i^k & \ \text{ für } i \in \mathcal{A}(x^k) \end{aligned} \tag{3}$$

`(4)`: Ein projizierter Gradientenschritt

$$x^{k+1} := \mathrm{Proj}_{[a,b]}\left(\tilde{x}^{k+1} - \rho \nabla f(\tilde{x}^{k+1})\right)$$

`(5)`: Falls $\|x^{k+1} - x^k\|$ hinreichend klein oder $\mathcal{A}(x^{k+1}) = \mathcal{A}(x^k)$ dann Ende, sonst $k := k+1$ und zurück zu `(2)`.

Es werden in Schritt `(3)` Optimierungsprobleme ohne jede Ungleichungsrestriktion gelöst. Schritt `(4)` führt dann den Update der aktiven Mengen aus. Der Parameter $\rho > 0$ hat keinen großen Einfluss auf die Konvergenz des Verfahrens.

2. (2 Punkte)
   Berechnen Sie die Lösung von Aufgabe 1 (a) mit Hilfe dieses aktive-Mengen-Verfahrens. Geben Sie alle Zwischenschritte an. Verwenden Sie als Startwert $x^0 = (0,0)^T$. Hinweis: das Verfahren konvergiert in zwei Schritten.

3. (2+2 Punkte)

   (a) Überführen Sie das Optimierungsproblem (3) in ein Problem der Form

   $$\min\ \frac{1}{2}\hat{x}^T \hat{H}\hat{x} + \hat{c}^T \hat{x}, \tag{4}$$

   wobei in $\hat{x}$ die freien Variablen x_i, $i \notin \mathcal{A}(x^k)$ untergebracht sind.

   (b) Sei $\bar{x}$ die Lösung von (2). Zeigen Sie: sind die aktive Menge $\mathcal{A}(\bar{x})$ und die Werte von $\bar{x}$ auf dieser aktive Mengen bekannt, dann ist die Lösung $\tilde{x}$ von

   $$\begin{aligned} \min\ & \frac{1}{2}x^T Hx + c^T x \\ x_i = \bar{x}_i & \ \text{ für } i \in \mathcal{A}(\bar{x}) \end{aligned} \tag{5}$$

   zulässig, also $a \leq \tilde{x} \leq b$, und es gilt $\tilde{x} = \bar{x}$. Das bedeutet, das Verfahren konvergiert dann in einem Iterationsschritt.

4. (2+4 Punkte)

   (a) Zeigen Sie: Es gilt nach Schritt `(3)` des Verfahrens $\left[\nabla f(\tilde{x}^{k+1})\right]_i = 0$ für die inaktiven Indizes $i \notin \mathcal{A}(x^k)$.

   (b) Zeigen Sie: Gilt in einem Schritt k des Verfahrens $\mathcal{A}(x^k) = \mathcal{A}(x^{k+1})$ und $x_i^k = x_i^{k+1}$ für $i \in \mathcal{A}(x^k)$, dann ist x^{k+1} die Lösung des Problems (2).