WS 2005/06 Technische Universität Berlin
Prof. Dietmar Hömberg Fakultät II
Daniela Kern Institut für Mathematik

12. Übung zur LV Nichtlineare Optimierung

Theoretische Aufgaben: (Abgabe in der Vorlesung am 03.02.06)

1. (4 Punkte) Die Mengen S_α seien gegeben durch
$$S_\alpha = \{x \in \mathbb{R}^2 \mid x_2 - x_1^\alpha \leq 0,\ -x_2 - x_1^\alpha \leq 0\}, \quad \alpha \geq 1.$$
   (a) Skizzieren Sie S_α für $\alpha \geq 1$.
   (b) Berechnen Sie die Kegel $T(S_\alpha, \bar{x})$ und $L(S_\alpha, \bar{x})$ für $\bar{x} = (0,0)^T$, $\alpha \geq 1$. Für welche $\alpha \geq 1$ genügt $\bar{x}$ den Mangasarian-Fromowitz-Bedingungen und ist somit regulär?

2. (3 Punkte) Sei $A \in \mathbb{R}^{n,n}$ symmetrisch. Diskutieren Sie die Kuhn-Tucker-Bedingungen für das Optimierungsproblem
$$\min_{x \in \mathbb{R}^n} \{x^T A x : \|x\| = 1\}.$$
Welche Bedeutung haben der Lagrange-Multiplikator $\lambda \in \mathbb{R}$ und die optimale Lösung $x^* \in \mathbb{R}^n$? Überlegen Sie, dass x^* regulär ist.

3. (6 Punkte) Lösen Sie die folgenden Optimierungsprobleme:
$$\text{(a)} \begin{cases} \min f(x,y) = (x-3)^2 + y^2 \\ x^2 - y \leq 0 \end{cases} \qquad \text{(b)} \begin{cases} \min f(x,y) = (x-2)^2 + (y-1)^2 \\ x + y - 2 \leq 0 \\ x^2 - y \leq 0 \end{cases}$$

4. (4 Punkte) Gegeben sei das folgende Optimierungsproblem
$$\begin{cases} \min f(x) = -x_2 \\ g_1(x) = x_2 + x_1^2 \leq 0 \\ g_2(x) = x_2 - x_1^2 \leq 0 \end{cases}$$
   (a) Skizzieren Sie das Problem und geben Sie die globale Minimalstelle x^* an.
   (b) Zeigen Sie, dass x^* regulär ist.
   (c) Berechnen Sei die Menge $\Lambda(x^*)$ aller Lösungen der Kuhn-Tucker-Bedingung
$$f'(x^*) + \lambda_1 g_1(x^*) + \lambda_2 g_2(x^*) = 0$$
   an und charakterisieren Sie die Menge $\Lambda(x^*)$.