

## Numerische Mathematik

### 2. Übungsblatt zur Vorlesung

#### 5. Aufgabe

insg. 6 Punkte

Gegeben sei das Anfangswertproblem

$$y'(t) = 4y(t)^{1/4}, y(0) = 0$$

- a) Berechnen Sie *alle* Lösungen dieses Anfangswertproblems. 2 Pkt
- b) Welche Näherung ergibt sich bei Anwendung des Euler-Verfahrens im Intervall  $[0, 1]$  bei beliebiger, konstanter Schrittweite  $h$ ? 2 Pkt
- c) Zeigen Sie, dass die Inkrementfunktion des Euler-Verfahrens für diese Differentialgleichung keine Lipschitzbedingung erfüllt, d.h. damit

$$|f(t, y_1) - f(t, y_2)| \leq L |y_1 - y_2| \forall y_1, y_2$$

gilt, muss  $L = \infty$  sein.

2 Pkt

#### 6. Aufgabe

insg. 6 Punkte

Betrachten Sie das implizite Euler-Verfahren

$$y_{i+1} = y_i + h_i f(t_{i+1}, y_{i+1})$$

zur Lösung der Differentialgleichung  $y' = f(t, y), y(t_0) = y_0$ .

- a) Welches praktische Problem tritt hier auf? 2 Pkt
- b) Bestimmen Sie die Konsistenzordnung. 4 Pkt

**Hinweis:** Verwenden Sie bei der Taylorentwicklung den Entwicklungspunkt  $t + h$ .

## 7. Aufgabe

insg. 6 Punkte

An der Spitze einer Zigarette werde ein Querschnittselement  $Q$  des Tabaks abgebrannt. Die dadurch aus  $Q$  freigewordene Teermenge sei  $\omega_0 = \omega(0)$ . Wir nehmen an, dass die gesamte Menge  $\omega_0$  mit konstanter Geschwindigkeit durch die Zigarette gezogen wird.

Bei diesem Vorgang wird der im Rauch enthaltene Teer teilweise vom Tabak absorbiert. Die Abnahme  $\omega'(t)$  des Teers bei der Stelle  $t$  ist proportional zur vorhandenen Teermenge  $\omega(t)$  an der Stelle  $t$ . Der Proportionalitätsfaktor sei  $a$  und heißt Absorbtionskoeffizient.

- a) Bestimme den Teil von  $\omega_0$ , der in den Mund gelangt. Die Zigarettenlänge sei  $T_1$ . 3 Pkt
- b) Die Zigarette besitze nun einen Filter zwischen  $t_1$  und  $T_1$ . Bestimme nun den Teil von  $\omega_0$ , der in den Mund gelangt, wenn der Absorbtionskoeffizient des Filters  $b$  ist. 3 Pkt

## 8. Programmieraufgabe

Programmieren Sie die vorhergehende Zigarettenaufgabe unter Verwendung des Eulers-Verfahren.

**Hinweis:** Auf der Homepage finden Sie vorbereitete MatLab-Routinen, die Sie nur noch ergänzen müssen.