Technische Universität Berlin Wintersemester 2005/06
Fakultät II; Institut für Mathematik
Prof. Dr. R. Nabben/C. Mense 3. November 2005

Numerische Mathematik

3. Übungsblatt zur Vorlesung

8. Aufgabe **insg. 4 Punkte**

Gegeben sei die Differentialgleichung $y' = f(t, y)$.Drücken Sie $y''''(t)$ durch f und seine partiellen Ableitungen aus.

9. Aufgabe **insg. 8 Punkte**

Betrachten Sie die Differentialgleichung $y' = f(t, y)$ mit $y(t) = z$.

a) Sei $\Phi(t, z, h, f) = a_1 f(t, z) + a_2 f(t + p_1 h, z + p_2 h f(t, z))$. **2 Pkt**
Zeigen Sie, dass mit $a_1 + a_2 = 1$, $a_2 p_1 = a_2 p_2 = \frac{1}{2}$ ein Einschrittverfahren der Ordnung ≥ 2 gegeben ist.

b) Sei Φ wie in (b). **2 Pkt**
Zeigen Sie, dass im allgemeinen für keine Wahl von a_1, a_2, p_1, p_2, Φ zu einem Einschrittverfahren der Ordnung > 2 werden kann.

c) Sei Φ wie in (b). **2 Pkt**
Bestimmen Sie a_1, a_2, p_1, p_2 so, dass der Fehlerterm in h^2 der Taylorentwicklung kleinstmögliche Konstanten besitzt.

d) Zeigen Sie, dass für lineare Differentialgleichungen mit konstanten Koeffizienten alle Einschrittverfahren Φ aus 1(b) der Konsistenzordnung 2 übereinstimmen. **2 Pkt**

10. Aufgabe **insg. 4 Punkte**

Gegeben sei die Differentialgleichung $y' = ay, y(0) = y_0$.
Zeigen Sie, dass die Iterierte u_n des Euler–Verfahrens zur Schrittweite $h = \frac{1}{n}$ für $n \to \infty$ punktweise gegen die Lösung $y(1)$ der Differentialgleichung konvergiert.

Hinweis: Zeigen Sie zunächst, dass $\lim\limits_{n\to\infty} \left(1 + \frac{a}{n}\right)^n = e^a$ ist.

Programmieraufgabe

Lösen Sie die Anfangswertaufgabe

$$y' = -2ty^2, \quad y(0) = 1$$

mit der exakten Lösung $y(t) = \frac{1}{t^2+1}$ im Intervall $[0, 1]$ mit dem Eulerverfahren, dem modifizierten Euler-Verfahren und dem Verfahren von Heun. Benutzen Sie die Schrittweiten $h = 0.1$ und $h = 0.05$. Vergleichen Sie die Fehler.

Hinweis: Auf der Homepage finden Sie vorbereitete MatLab-Routinen, die Sie nur noch ergänzen müssen.