Technische Universität Berlin Wintersemester 2005/06
Fakultät II; Institut für Mathematik
Prof. Dr. R. Nabben/C. Mense 9. November 2005

Numerische Mathematik

4. Übungsblatt zur Vorlesung

11. Aufgabe **insg. 6 Punkte**

Konstruieren Sie mit Hilfe der partiellen Ableitungen von $f(t, y(t))$ Einschrittverfahren erster, zweiter und dritter Konsistenzordnung für die folgenden Anfangswertaufgaben:

a) $y'(t) = 2ty(t)$, $y(0) = 1$
a) $y'(t) = \frac{1}{1+y(t)^2}$, $y(0) = 1$

Zeigen Sie auch, dass die von Ihnen entwickelten Verfahren **nur** von erster, zweiter bzw. dritter Ordnung sind.

12. Aufgabe **insg. 8 Punkte**

Soll ein Runge–Kutta–Verfahren mindestens die Konsistenzordnung 2 haben, so sind die Bedingungen

$$\gamma_1 + \cdots + \gamma_m = 1, \quad \alpha_r = \beta_{r1} + \cdots + \beta_{r,m}, \; r = 1, \ldots, m$$

hinreichend. Sind sie auch <u>notwendig</u>? Beweis oder Gegenbeispiel!

Programmieraufgabe

Gegeben sei das Anfangswertproblem

$$y'(t) = 1 + y(t)^2, y(0) = 0$$

Bestimmen Sie Näherungslösungen an der Stelle $t = 1.55$ mit

a) dem Verfahren von Heun,
b) dem modifizierten Euler-Verfahren
c) dem klassischen Runge-Kutta-Verfahren
d) dem durch das folgende Butcher-Schema gegebenen 6-stufigen Runge-Kutta-Verfahren der Konsistenzordnung 5 (Lawson, 1966)

$$\begin{array}{c|cccccc}
0 & & & & & & \\
\frac{1}{2} & \frac{1}{2} & & & & & \\
\frac{1}{4} & \frac{3}{16} & \frac{1}{16} & & & & \\
\frac{1}{2} & 0 & 0 & \frac{1}{2} & & & \\
\frac{3}{4} & 0 & -\frac{3}{16} & \frac{6}{16} & \frac{9}{16} & & \\
1 & \frac{1}{7} & \frac{4}{7} & \frac{6}{7} & -\frac{12}{7} & \frac{8}{7} & \\
\hline
 & \frac{7}{90} & 0 & \frac{32}{90} & \frac{12}{90} & \frac{32}{90} & \frac{7}{90}
\end{array}$$