Technische Universität Berlin Wintersemester 2005/06
Fakultät II; Institut für Mathematik
Prof. Dr. R. Nabben/C. Mense 23. November 2005

Numerische Mathematik

6. Übungsblatt zur Vorlesung

16. Aufgabe — insg. 6 Punkte

Betrachten Sie die Differenzengleichung

$$u_{j+k} + \alpha_{k-1} u_{j+k-1} + \ldots \alpha_0 u_j = 0,$$

die sich darstellen läßt als

$$\underbrace{\begin{bmatrix} u_{j+1} \\ \vdots \\ u_{j+k} \end{bmatrix}}_{=:U_{j+1}} = \underbrace{\begin{bmatrix} 0 & 1 & & & \\ & \ddots & \ddots & & \\ & & \ddots & \ddots & \\ & & & 0 & 1 \\ -\alpha_0 & -\alpha_1 & \ldots & -\alpha_{k-2} & -\alpha_{k-1} \end{bmatrix}}_{=:A} \underbrace{\begin{bmatrix} u_j \\ \vdots \\ u_{j+k-1} \end{bmatrix}}_{=:U_j}$$

a) Zeigen Sie,

$$U_n = AU_{n-1} = AAU_{n-2} = \ldots = A^n U_0 = X^{-1} J^n X U_0,$$

wobei $XAX^{-1} = J$ die Jordansche Normalform von A ist. **2 Pkt**

b) Bestimmen Sie die Lösung der Gleichung

$$v_{j+2} = v_{j+1} + v_j$$

für $j \in \mathbb{N}$ mit $v_0 := 0,\ v_1 := 1$, d.h. geben Sie eine Formel für den Wert von v_j in Abhängigkeit von j an. **4 Pkt**

17. Aufgabe — insg. 6 Punkte

Gegeben sei das lineare Mehrschrittverfahren

$$u_{j+2} - 2u_{j+1} + u_j = 0 \quad j = 0, 1, 2, \ldots$$

a) Stellen sie u_N in Abhängigkeit von u_1 und u_0 dar. **2 Pkt**

b) Untersuchen Sie die Approximation an der festen Stelle $T = t_0 + Nh$ mit zunehmender Verfeinerung von h (und somit wachsendem N), d.h. betrachten Sie

$$\lim_{h \to 0} u_N$$

mit $Nh = T - t_0$ fest. Dabei sei $u_0 = y(t_0) = y_0$ und u_1 mittels des Euler-Verfahrens berechnet. Unter welchen Bedingungen konvergiert $\lim_{h \to 0} u_N$ gegen $y(T)$? **4 Pkt**

Programmieraufgabe

Schreiben Sie ein Programm, welches eine beliebige Differentialgleichung $y' = f(t,y), y(t_0) = y_0$ in $[t_0, t_e]$ löst. Und zwar einmal mit dem Verfahren von Adams–Bashforth und zum anderen mit dem Verfahren von Nyström (s.u.). Verwenden Sie das klassische Runge–Kutta–Verfahren für die Startwerte.

$$\begin{aligned} u_{j+3} &= u_{j+2} + \frac{h}{12}\{23 f_{j+2} - 16 f_{j+1} + 5 f_j\} \quad \text{(Adams–Bashforth)} \\ u_{j+3} &= u_{j+1} + \frac{h}{3}\{7 f_{j+2} - 2 f_{j+1} + f_j\} \quad \text{(Nyström)} \end{aligned}$$

wobei $f_k := f(t_k, u_k)$ ist.