

## Numerische Mathematik

### 11. Übungsblatt zur Vorlesung

#### 26. Aufgabe

insg. 6 Punkte

Betrachten Sie die implizite Trapezregel

$$u_{j+2} = u_j + h\{f_{j+2} + f_j\}$$

für die Differentialgleichung  $y' = \lambda y$ ,  $\lambda \in \mathbb{C}$ . Bezeichnen Sie mit  $z_1(h\lambda)$ ,  $z_2(h\lambda)$  die Nullstellen von  $\rho(z) - h\lambda\sigma(z)$ .  $z_1$  bezeichne dabei die Hauptwurzel, d.h.  $z_1 \rightarrow 1$  für  $h\lambda \rightarrow 0$ .

Berechnen und skizzieren Sie die Bereiche absoluter Stabilität ( $D_\lambda$ ) und relativer Stabilität ( $R_\lambda$ ), d.h.

$$D_\lambda = \{h\lambda \in \mathbb{C} : |z_1(h\lambda)|, |z_2(h\lambda)| < 1\}, \quad R_\lambda = \{h\lambda \in \mathbb{C} : |z_2(h\lambda)| < |z_1(h\lambda)|\}.$$

#### 27. Aufgabe

insg. 12 Punkte

Stellen Sie fest, ob das folgende implizite Runge–Kutta–Verfahren, welches durch die nebenstehende Tabelle gegeben ist,  $A$ -stabil ist.

$$\begin{array}{c|cc} 0 & \frac{1}{12} & -\frac{1}{12} \\ 1 & \frac{7}{12} & \frac{5}{12} \\ \hline & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \end{array}$$

#### Programmieraufgabe

Berechnen Sie zur Lösung der Anfangswertaufgabe

$$y' = \begin{pmatrix} -21 & 19 & -20 \\ 19 & -21 & 20 \\ 40 & -40 & -40 \end{pmatrix} y, \quad y(0) = (1, 0, -1)^T$$

Näherungen auf dem Intervall  $[0, 1]$  mit

- (i) dem Euler–Verfahren für die Schrittweiten  $h = 0.04$  und  $h = 0.02$ .
- (ii) der impliziten Trapezregel  $u_{j+1} - u_j = \frac{h}{2} (f_{j+1} + f_j)$  mit der Schrittweite  $h = 0.04$ .

Berechnen Sie auch die absoluten und relativen Fehler in der 2-Norm.