Technische Universität Berlin Wintersemester 2005/06
Fakultät II; Institut für Mathematik
Prof. Dr. R. Nabben/C. Mense 19. Januar 2006

Numerische Mathematik

11. Übungsblatt zur Vorlesung

26. Aufgabe insg. 6 Punkte

Betrachten Sie die implizite Trapezregel

$$u_{j+2} = u_j + h\{f_{j+2} + f_j\}$$

für die Differentialgleichung $y' = \lambda y, \lambda \in \mathbb{C}$. Bezeichnen Sie mit $z_1(h\lambda), z_2(h\lambda)$ die Nullstellen von $\rho(z) - h\lambda\sigma(z)$. z_1 bezeichne dabei die Hauptwurzel, d.h. $z_1 \to 1$ für $h\lambda \to 0$.

Berechnen und skizzieren Sie die Bereiche absoluter Stabilität (D_λ) und relativer Stabilität (R_λ), d.h.

$$D_\lambda = \{h\lambda \in \mathbb{C} : |z_1(h\lambda)|, |z_2(h\lambda)| < 1\}, \;\; R_\lambda = \{h\lambda \in \mathbb{C} : |z_2(h\lambda)| < |z_1(h\lambda)|\}.$$

27. Aufgabe insg. 12 Punkte

Stellen Sie fest, ob das folgende implizite Runge–Kutta–Verfahren, welches durch die nebenstehende Tabelle gegeben ist, A–stabil ist.

$$\begin{array}{c|cc} 0 & \frac{1}{12} & -\frac{1}{12} \\ 1 & \frac{7}{12} & \frac{5}{12} \\ \hline & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \end{array}$$

Programmieraufgabe

Berechnen Sie zur Lösung der Anfangswertaufgabe

$$y' = \begin{pmatrix} -21 & 19 & -20 \\ 19 & -21 & 20 \\ 40 & -40 & -40 \end{pmatrix} y, \quad y(0) = (1, 0, -1)^T$$

Näherungen auf dem Intervall $[0, 1]$ mit

(i) dem Euler–Verfahren für die Schrittweiten $h = 0.04$ und $h = 0.02$.

(ii) der impliziten Trapezregel $u_{j+1} - u_j = \frac{h}{2}\,(f_{j+1} + f_j)$ mit der Schrittweite $h = 0.04$.

Berechnen Sie auch die absoluten und relativen Fehler in der 2-Norm.