Zahlensysteme

Zahlensysteme benutzen Zeichen eines Alphabets.

b-adisches Zahlensystem: $b \in \mathbb{N}, b > 1$.

Alphabet $\Sigma_b := \{0, 1, \ldots, b-1\}$.

Beispiele:
$b = 10$: Dezimal-, $b = 2$: Dual-/Binär-, $b = 8$: Oktal-, $b = 16$: Hexadezimalsystem ($\Sigma_{16} := \{0, 1, \ldots, 9, A, B, C, D, E, F\}$), 12er-, 60er-System (Uhrzeit).

Eine feste "Wort"-Länge erreicht man durch führende Nullen: $(01234)_b$.

Wir definieren die Abbildungen:

$$\begin{aligned} \operatorname{div}: \quad & \mathbb{N} \times \mathbb{N} \to \mathbb{N}, \quad (z, b) \mapsto z \operatorname{div} b := \max\{k \in \mathbb{N} : k \leq z/b\} \\ \operatorname{mod}: \quad & \mathbb{N} \times \mathbb{N} \to \Sigma_b, \quad (z, b) \mapsto z \bmod b := z - (z \operatorname{div} b) \cdot b. \end{aligned}$$

(ganzzahlige Division ohne Rest und Rest der ganzzahligen Division).

Es gilt f.a. $z \in \mathbb{N}$:

$$z = (z \operatorname{div} b) \cdot b + z \bmod b.$$

Satz 1 *Natürliche Zahlen können in jedem b-adischen Zahlensystem eindeutig dargestellt werden: Sei $b \in \mathbb{N}, b > 1$ gegeben.*

$$\begin{aligned} & z \in \mathbb{N}, 0 \leq z \leq b^{n-1}, n \in \mathbb{N} \\ \Rightarrow \quad & \exists! z_i \in \Sigma_b, i = 0, \ldots, n-1 : z = \sum_{i=0}^{n-1} z_i b^i. \end{aligned} \tag{1}$$

Ziffernschreibweise: $z = (z_{n-1} \ldots z_1 z_0)_b$.

Beweis: 1. Existenz (über vollst. Ind.):
Induktionsanfang: $z < b$ hat Darstellung $z = (0 \ldots 0 z_0)$ mit $z_0 = z$.
Induktionsvoraussetzung: Die Aussage sei wahr für die Zahlen $0, \ldots, z-1$, d.h. diese Zahlen haben eine Darstellung (**??**).
Induktionsschluss: Zu zeigen ist, dass jetzt auch z (mit $z \geq b$) eine Darstellung (**??**) hat.

Es gilt:

$$(z \operatorname{div} b) \cdot b \leq z$$

und damit wegen $b > 1$:

$$z' := z \operatorname{div} b < z,$$

d.h. es existiert nach I.V. die Darstellung

$$z' := \sum_{i=0}^{n-1} z'_i b^i, z'_i \in \Sigma_b.$$

Außerdem:

$$z' b \leq z < b^n \Rightarrow z' < b^{n-1} \Rightarrow z'_{n-1} = 0 \Rightarrow z' = \sum_{i=0}^{n-2} z'_i b^i,$$

denn sonst

$$z' = \underbrace{z'_{n-1} b^{n-1}}_{\geq b^{n-1}, \text{wenn } z'_{n-1} \geq 1} + \sum_{i=0}^{n-2} \underbrace{z'_i b^i}_{\geq 0} \quad \geq \quad b^{n-1}.$$

Es gilt:

$$\begin{aligned} z \;=\; z'b + z \bmod b \;&=\; \left(\sum_{i=0}^{n-2} z_i' b^i\right) b + z \bmod b \\ &=\; \sum_{i=0}^{n-2} z_i' b^{i+1} + z \bmod b \;=\; \sum_{i=1}^{n-1} \underbrace{z_{i-1}'}_{=:z_i} b^i + \underbrace{z \bmod b}_{=:z_0} \;=\; \sum_{i=0}^{n-1} z_i b^i, \end{aligned}$$

d.h. z hat Darstellung (**??**).

2. Eindeutigkeit:
Annahme: $z = (z_{n-1} \dots z_1 z_0)_b = (\bar{z}_{n-1} \dots \bar{z}_1 \bar{z}_0)_b$.

Sei $l := \max\{i = 0, \dots, n-1 : z_i \neq \bar{z}_i\}$, also $z_i = \bar{z}_i$ f.a. $i = l+1, \dots, n-1$. Daher gilt

$$\sum_{i=l+1}^{n-1} z_i b^i = \sum_{i=l+1}^{n-1} \bar{z}_i b^i,$$

also auch

$$\sum_{i=0}^{l} z_i b^i = \sum_{i=0}^{l} \bar{z}_i b^i,$$

d.h.

$$\sum_{i=0}^{l-1} z_i b^i + z_l b^l = \sum_{i=0}^{l-1} \bar{z}_i b^i + \bar{z}_l b^l.$$

O.B.d.A. sei $z_l > \bar{z}_l$. Dann folgt

$$\sum_{i=0}^{l-1} (\bar{z}_i - z_i) b^i = \underbrace{(z_l - \bar{z}_l)}_{\geq 1} b^l \geq b^l.$$

Andererseits

$$\sum_{i=0}^{l-1} (\bar{z}_i - z_i) b^i \leq \sum_{i=0}^{l-1} \underbrace{|\bar{z}_i - z_i|}_{\leq b-1} b^i \leq (b-1) \sum_{i=0}^{l-1} b^i = (b-1) \frac{b^l - 1}{(b-1)} = b^l - 1 < b^l$$

im Widerspruch zu oben. □

Darstellung ganzer Zahlen auf dem Rechner

Ganze Zahlen (engl.: integer numbers, integers).
Auf dem Rechner: Zweiersystem, $b = 2$, (1 Stelle = 1 Bit).

1. Möglichkeit: "$\mathbb{Z} = \mathbb{N}$ + Vorzeichen":

$$z = (-1)^\nu \sum_{i=0}^{n-1} z_i 2^i, \quad \nu, z_i \in \Sigma_2 = \{0, 1\}, i = 0, \dots, n-1$$

   mit $z_n = \nu$ (Vorzeichenbit) benutzt man $n+1$ Bits.

2. Möglichkeit:

$$z = \sum_{i=0}^{k-1} z_i 2^i - 2^{k-1}, \quad z_i \in \Sigma_2 = \{0, 1\}, i = 0, \dots, k-1$$

   k Bits.