TECHNISCHE UNIVERSITÄT BERLIN WS 06/07
Institut für Mathematik 21.4.2007
Prof. Dr. Ferus

Analysis I–Klausur

Name: .... Vorname: ....

Matr.–Nr.: .... Studiengang: ....

Geben Sie bei allen Antworten eine Begründung bzw. einen Beweis an.

Für die Bearbeitung der Aufgaben stehen Ihnen 90 Minuten zur Verfügung.
Ausser Stiften und Papier sind keine weiteren Hilfsmittel erlaubt (insbesondere sind Handys und Taschenrechner NICHT zugelassen).

Bitte benutzen Sie für jede Aufgabe ein neues Blatt.

Beginnen Sie mit den Aufgaben(teilen), die Ihnen am leichtesten fallen. Die Aufgaben sind nach Themengebieten geordnet.
Die Klausur ist mit 21 Punkten bestanden.

1	2	3	4	5	6	$\sum$

1. Aufgabe (6 Punkte)

(Thema: Folgen)

a) Sei $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ eine reelle oder komplexe Folge. Geben Sie die Definition von "$(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ konvergiert gegen a" ($a \in \mathbb{R}$ oder $\mathbb{C}$) an.

b) Sei $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ eine Nullfolge und $(b_n)_{n\in\mathbb{N}}$ eine beschränkte Folge in $\mathbb{R}$ oder in $\mathbb{C}$.

Zeigen Sie, dass $(a_n \cdot b_n)_{n\in\mathbb{N}}$ dann ebenfalls Nullfolge ist.

c) Zeigen Sie durch ein Beispiel, dass auf die Voraussetzung "$(b_n)_{n\in\mathbb{N}}$ ist beschränkt" nicht verzichtet werden kann.

2. Aufgabe (8 Punkte)

(Thema: Taylorpolynom)

a) Bestimmen Sie das Taylorpolynom 3. Grades der Funktion $f :]-2,\infty[\to \mathbb{R}$ mit $f(x) = \ln(2+x)$ im Entwicklungspunkt $x_0 = 1$.

b) Zeigen Sie, dass der Fehler im Intervall $[0,2]$ kleiner als $0,02$ bleibt.

3. Aufgabe (6 Punkte)

(Thema: Stetigkeit, Grenzwerte von Funktionen)

Lassen sich die für $x \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$ erklärten reellwertigen Funktionen f, g mit

a) $f : x \mapsto \frac{x - \sin x}{x^6}$

b) $g : x \mapsto \frac{x - \sin x}{x^3}$

für $x = 0$ so erklären, dass die entstehende Erweiterung stetig ist?

4. Aufgabe (8 Punkte)

(Thema: Differentiation, Extremstellen)

Sei $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ definiert durch $f(x) := (2x^2 - x - 1)e^{-x}$. Bestimmen Sie die lokalen Extremstellen von f. Hat f ein globales Maximum oder Minimum? Wenn ja, geben Sie den entsprechenden Wert an.

5. Aufgabe (8 Punkte)

(Thema: Integration)

a) Bestimmen Sie das unbestimmte Integral $\int e^y \sin y \; dy$ durch zweimalige partielle Integration.

b) Führen Sie durch Substitution das Integral

$$I(z) = \int_1^z \sin(\ln x) \; dx$$

für $z \geq 1$ auf ein Integral der Form $\int_a^b e^y \sin y \; dy$ zurück und geben Sie $I(z)$ an.

6. Aufgabe (6 Punkte)

(Thema: Potenzreihen)

Bestimmen Sie **alle** $x \in \mathbb{R}$, für die die folgende Potenzreihe konvergiert.

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{(x+2)^k}{3^k (1 + \frac{1}{k})^k}$$

Gesamtpunktzahl: 42