TECHNISCHE UNIVERSITÄT BERLIN WS 06/07
Institut für Mathematik Stand: 16. April 2007
Ferus / Hoffkamp

Lösungen zur Klausur vom 21.4.07
Analysis I

---

1. Aufgabe (6 Punkte)

a) $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = a \Longleftrightarrow \forall \varepsilon > 0 \exists n \in \mathbb{N} \forall n \geq N : |a_n - a| < \varepsilon$

b) Sei $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = 0$ und es gebe ein $M \in \mathbb{R}^+$ mit $|b_n| \leq M$ für alle $n \in \mathbb{N}$.

Dann gilt: $|a_n b_n| = |a_n||b_n| \leq |a_n| \cdot M$ für alle $n \in \mathbb{N}$.

Sei $\frac{\varepsilon}{M} > 0$. Dann existiert ein $N \in \mathbb{N}$, so dass für alle $n \geq N$ gilt $|a_n| \leq \frac{\varepsilon}{M}$.

Damit folgt: $|a_n b_n| \leq |a_n| \cdot M < \frac{\varepsilon}{M} \cdot M = \varepsilon$ für alle $n \geq N$.

c) $a_n = \frac{1}{n}$ und $b_n = n$. $(n \geq 1)$

2. Aufgabe (8 Punkte)

a) Wir bestimmen zunächst $f^{(k)}(0)$ für $k = 0, 1, 2, 3$:
$f(1) = \ln 3$
$f'(x) = \frac{1}{2+x} \Longrightarrow f'(1) = \frac{1}{3}$
$f''(x) = -\frac{1}{(2+x)^2} \Longrightarrow f''(1) = -\frac{1}{9}$
$f'''(x) = \frac{2}{(2+x)^3} \Longrightarrow f'''(1) = \frac{2}{27}$

Damit ergibt sich als Taylorpolynom: $T_3(x) = \sum\limits_{k=0}^{3} \frac{f^{(k)}(1)}{k!}(x-1)^k =$
$\ln 3 + \frac{1}{3}(x-1) - \frac{1}{9}\frac{1}{2}(x-1)^2 + \frac{2}{27}\frac{1}{3!}(x-1)^3 = \ln 3 + \frac{1}{3}(x-1) - \frac{1}{18}(x-1)^2 + \frac{1}{81}(x-1)^3$

b) Es ist $f^{(4)}(x) = -\frac{6}{(2+x)^4}$. Damit ergibt sich für das Restglied
$|R(x)| = \left|\frac{f^{(4)}(\xi)}{4!}(x-1)^4\right| = \left|\frac{6}{(2+\xi)^4 \cdot 4!}(x-1)^4\right| = \left|\frac{(x-1)^4}{(2+\xi)^4 \cdot 4}\right| \leq \frac{(2-1)^4}{(2+0)^4 \cdot 4} = \frac{1}{64} \leq \frac{1}{50} = 0,02.$

3. Aufgabe (6 Punkte)

a) Wir bestimmen $\lim\limits_{x\uparrow 0} f(x)$ und $\lim\limits_{x\downarrow 0} f(x)$:

Mit der Regel von Bernoulli/L'Hospital erhalten wir:

$\lim\limits_{x\uparrow 0} f(x) = \lim\limits_{x\uparrow 0} \frac{x-\sin x}{x^6} = \lim\limits_{x\uparrow 0} \frac{1-\cos x}{6x^5} = \lim\limits_{x\uparrow 0} \frac{\sin x}{30x^4} = \lim\limits_{x\uparrow 0} \frac{\cos x}{120x^3} = -\infty.$

Analog erhält man

$\lim\limits_{x\downarrow 0} f(x) = \lim\limits_{x\downarrow 0} \frac{\cos x}{120x^3} = \infty$. Damit ist f an der Stelle $x = 0$ nicht stetig fortsetzbar.

b) Mit der Regel von Bernoulli/L'Hospital erhalten wir:

$\lim\limits_{x\to 0} g(x) = \lim\limits_{x\to 0} \frac{x-\sin x}{x^3} = \lim\limits_{x\to 0} \frac{1-\cos x}{3x^2} = \lim\limits_{x\to 0} \frac{\sin x}{6x} = \lim\limits_{x\to 0} \frac{\cos x}{6} = \frac{1}{6}$. Damit ist g an der Stelle $x = 0$ mit der Festsetzung $g(0) := \frac{1}{6}$ stetig.

4. Aufgabe (8 Punkte)

f ist zweimal differenzierbar mit den Ableitungen

$$f'(x) = (-2x^2 + 5x)e^{-x},$$
$$f''(x) = (2x^2 - 9x + 5)e^{-x}.$$

$f'(x) = 0$ genau dann, wenn $x = 0$ oder $x = \frac{5}{2}$. Da $f''(0) = 5 > 0$ und $f''(\frac{5}{2}) - 5e^{-\frac{5}{2}} < 0$ ist, ist bei $x = 0$ ein lokales Minimum und bei $x = \frac{5}{2}$ ein lokales Maximum. Da alle Punkte des Definitionsbereichs von f innere Punkte sind, sind dies die einzigen lokalen Extremwerte.
Es gilt $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x) = \infty$, $\lim\limits_{x\to\infty} f(x) = 0$ und $f(0) = -e^{-0} = -1 < 0$. Daher ist $f(0) = -1$ globales Minimum von f und f besitzt kein globales Maximum.

5. Aufgabe (8 Punkte)

a) Zweimalige partielle Integration liefert

$$\begin{aligned}\int e^y \sin y\, dy &= e^y \sin y - \int e^y \cos y\, dy\\ &= e^y \sin y - (e^y \cos y + \int e^y \sin y\, dy)\\ &= e^y \sin y - e^y \cos y - \int e^y \sin y\, dy\end{aligned}$$

Daraus folgt: $2\int e^y \sin y\, dy = e^y(\sin y - \cos y)$.
Also ist $\int e^y \sin y\, dy = \frac{e^y(\sin y - \cos y)}{2} + C$, $C \in \mathbb{R}$.

b) Mit der Substitution $x = e^t$, $\frac{dx}{dt} = e^t$ ergibt sich:

$$\begin{aligned} I(z) &= \int_1^z \sin(\ln x)\, dx \\ &= \int_{\ln 1}^{\ln z} \sin(\ln e^t) \cdot e^t dt \\ &= \int_0^{\ln z} e^t \sin t dt \\ &= \left[\frac{e^t(\sin t - \cos t)}{2} \right]_0^{\ln z} \\ &= \frac{z(\sin(\ln z) - \cos(\ln z)) + 1}{2}. \end{aligned}$$

6. Aufgabe

(6 Punkte)

Es gilt

$$\left| \frac{(x+2)^{k+1}}{3^{k+1}(1+\frac{1}{k+1})^{k+1}} \frac{3^k(1+\frac{1}{k})^k}{(x+2)^k} \right| = \frac{|x+2|}{3} \frac{(1+\frac{1}{k})^k}{(1+\frac{1}{k+1})^{k+1}} \xrightarrow{k\to\infty} \frac{|x+2|}{3}\frac{e}{e} = \frac{|x+2|}{3}.$$

Nach dem Quotientenkriterium konvergiert die Reihe absolut, wenn $\frac{|x+2|}{3} < 1$ gilt, was äquivalent zu $x \in (-5, 1)$ ist. Auf $\mathbb{R} \setminus [-5, 1]$ ist die Reihe divergent. Es sind noch die Randpunkte zu untersuchen.

Für $x \in \{-5, 2\}$ ist $\left| \frac{(x+2)^k}{3^k(1+\frac{1}{k})^k} \right| = \frac{1}{(1+\frac{1}{k})^k} \to e^{-1} \neq 0$. Daher ist in diesen Punkten das notwendige Konvergenzkriterium für Reihen nicht erfüllt.