Technische Universität Berlin
Institut für Mathematik
Sekr. MA 8-2 / Frau Schubert

WS 06/07
Materialien
03.02.2007

Albrecht Gündel-vom Hofe
Jose Mendez

Materialien zur Analysis II

Begriffe an die wir uns erinnern:

Seien $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ oder $\mathbb{C}$ und $M \subset \mathbb{R}^n$.

- **Funktionenfolge:**
  $f_k : M \longrightarrow \mathbb{K}$. Dann (f_k) definiert durch

  $$\boxed{(f_k(\boldsymbol{x})), \boldsymbol{x} \in M.}$$

- **Funktionenreihe:**
  (f_k) Funktionenfolge, $f_k : M \longrightarrow \mathbb{K}$. Dann: (F_N) mit

  $$\boxed{F_N(\boldsymbol{x}) := \sum_{k=0}^{N} f_k(\boldsymbol{x}), \boldsymbol{x} \in M.}$$

  Folge von Partialsummen!

- **Punktweise (absolute) Konvergenz, Grenzfunktion:**
  $\sum_{k=0}^{\infty} f_k$ punktweise konvergent auf $M \Leftrightarrow \sum_{k=0}^{\infty} f_k(\boldsymbol{x})$ konvergent für alle $\boldsymbol{x} \in M$

  $\sum_{k=0}^{\infty} f_k$ punktweise absolut konvergent auf $M \Leftrightarrow \sum_{k=0}^{\infty} |f_k(\boldsymbol{x})| < \infty$ für alle $\boldsymbol{x} \in M$

  $$\boxed{f : N \longrightarrow \mathbb{K}, f(\boldsymbol{x}) := \sum_{k=0}^{\infty} f_k(\boldsymbol{x}), N := \{\boldsymbol{x} \in M : \sum_{k=0}^{\infty} f_k(\boldsymbol{x}) \text{ konv.}\}}$$

  heißt Grenzfunktion von $\sum_{k=0}^{\infty} f_k$.

- **Supremums-Norm:**
  $M \subset \mathbb{R}^n$ beliebig, $f : M \longrightarrow \mathbb{K}$. Dann:

  $$\boxed{||f||_M := \sup_{\boldsymbol{x} \in M} |f(\boldsymbol{x})| = \sup\{|f(\boldsymbol{x})| : \boldsymbol{x} \in M\}.}$$

f beschränkt auf $M \Leftrightarrow ||f||_M < \infty$.

Bem.: $f : K \longrightarrow \mathbb{K}$ stetig, $K \subset \mathbb{R}^n$ kompakt $\Rightarrow$ Es gibt $\boldsymbol{x_0} \in K$ mit $|f(\boldsymbol{x_0})| = ||f||_K$.

- **Normale Konvergenz:**
  $\sum_{k=0}^{\infty} f_k$ mit $f_k : M \longrightarrow \mathbb{K}$ beschränkt. Dann: $\sum_{k=0}^{\infty} f_k$ normal konvergent auf $M \Leftrightarrow$

  $$\boxed{\sum_{k=0}^{\infty} ||f_k||_M < \infty.}$$

- **Cauchykriterium für normale Konvergenz:**
  $f_k : M \longrightarrow \mathbb{K}$ mit $\sum_{k=0}^{\infty} ||f_k||_M < \infty$. Dann:
  $\sum_{k=0}^{\infty} f_k$ normal konvergent auf $M \Rightarrow$

  $$\boxed{\forall \epsilon > 0 \quad \exists k_0 \in \mathbb{N} \quad \forall \mu > k_0 : ||\sum_{k=k_0+1}^{\mu} f_k||_M < \epsilon.}$$

- **Stetigkeitskriterium:**
  (f_k) mit $f_k : M \longrightarrow \mathbb{K}$ stetig, $||f_k||_M < \infty$. Dann:

  $\forall \epsilon > 0 \quad \exists k_0 \in \mathbb{N} \quad \forall \mu > k_0 : ||\sum_{k=k_0+1}^{\mu} f_k||_M < \epsilon \Rightarrow \sum_{k=0}^{\infty} f_k$ punktweise konvergent auf M und $f := \sum_{k=0}^{\infty} f_k$ stetig!

- **Weierstraß-Kriterium:**
  (f_k) mit $f_k : M \longrightarrow \mathbb{K}$ stetig, (a_k) mit $a_k \geq 0, \sum_{k=0}^{\infty} a_k < \infty$. Dann gilt:

  $$\boxed{||f_k||_M \leq a_k \text{ für fast alle } k \in \mathbb{N} \Rightarrow \sum_{k=0}^{\infty} f_k \text{ normal konvergent.}}$$

  Insbesondere folgt $f := \sum_{k=0}^{\infty} f_k$ stetig auf M.

- **Potenzreihen:**
  (c_n) Folge von Zahlen $c_n \in \mathbb{C}, a \in \mathbb{C}$. Dann heißt

  $$\boxed{P(z) := \sum_{k=0}^{\infty} c_n (z-a)^n.}$$

  Potenzreihe mit Entwicklungspunkt a. Die Zahlen c_n heißen Koeffizienten der Potenzreihe.

  - **Konvergenzverhalten:**
    $P(z) := \sum_{k=0}^{\infty} c_n (z-a)^n$ konvergiert für $z_0 \in \mathbb{C}, z_0 \neq a \Rightarrow$

    $$\boxed{P(z) \text{ und } P'(z) := \sum_{k=1}^{\infty} n c_n (z-a)^{n-1}.}$$

    konvergieren auf $M := D_r(a)$ normal für jedes $r \in (0, |z_0 - a|)$.

- **Konvergenzradius:**
  Definiert man als Konvergenzradius

$$\boxed{R := sup\{r = |z_0 - a| : P(z_0) \text{ konvergent}\}.}$$

  so gilt

  * $P(z)$ konvergiert auf $D_r(z_0)$ normal (und damit punktweise absolut) für jedes $r \in (0, R)$.
  * $P(z_0)$ divergiert für alle $z_0 \in \mathbb{C} : |z_0 - a| > R$.

- **Konvergenzradiusberechnung:**

  * Quotientenkriterium. Für die Koeffizientenfolge (c_n) gelte: $c_n \neq 0$ für fast alle $n \in \mathbb{N}$ und $|\frac{c_n}{c_{n+1}}|$ konvergent. Dann

$$\boxed{R = \lim_{n\to\infty} |\tfrac{c_n}{c_{n+1}}|}$$

  * Allgemein gültig ist die Formel von Hadamard: $P(z)$ habe den Konvergenzradius R. Dann gilt:
    * $\boxed{R = \frac{1}{\overline{\lim}_{n\to\infty} \sqrt[n]{|c_n|}},}$ falls $\overline{\lim}_{n\to\infty} \sqrt[n]{|c_n|} \neq 0.$
    * $R = \infty$ falls $\overline{\lim}_{n\to\infty} \sqrt[n]{|c_n|} = 0.$
    * $R = 0$ falls $\overline{\lim}_{n\to\infty} \sqrt[n]{|c_n|} = \infty.$

- **Stetigkeit:**
  $P(z)$ habe den Konvergenzradius $R > 0$(evt. $R = \infty$). Dann gilt:

$$\boxed{P : D_R(a) \longrightarrow \mathbb{K}} \text{ ist stetig auf } D_R(a).$$

- **Wichtige Beispiele:**
  a) Die geometrische Reihe

$$\boxed{f(z) := \textstyle\sum_{k=0}^{\infty} z^n.}$$

  mit Konvergenzradius $R = 1$, Entwicklungspunkt $a = 0$.
  b) Exponentialfunktion

$$\boxed{exp(z) := \textstyle\sum_{k=0}^{\infty} \frac{z^n}{n!}.}$$

  mit Konvergenzradius $R = \infty$, Entwicklungspunkt $a = 0$.
  c) Sinus/Cosinus: Aus der Eulerschen Formel $e^{ix} = cosx + isinx$ bzw.

$$cosx = \frac{e^{ix} + e^{-ix}}{2}$$

  und

$$sinx = \frac{e^{ix} - e^{-ix}}{2i}$$

  erhält man:

$$\boxed{cos(x) := \textstyle\sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{2n!} x^{2n}.}$$

$$\boxed{sin(z) := \textstyle\sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(2n+1)!} x^{2n+1}.}$$