Technische Universität Berlin
Institut für Mathematik
Sekr. MA 8-2 / Frau Schubert

WS 06/07
Materialien
01.02.2007

Albrecht Gündel vom Hofe
Jose Mendez

Materialien zur Analysis II

Eine elementare, effiziente Form ganze rationale Funktionen zu approximieren kann unter Verwendung des Horner-Schemas implementiert werden. Im Folgenden zeigen wir, wie man eine Linearisierung einer ganzen rationalen Funktion arithmetisch gewinnen kann.

Seien $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ oder $\mathbb{K} = \mathbb{C}$ und $P_n[x]$ der Vektorraum der Polynomen in der Unbestimmten x über dem Körper $\mathbb{K}$ vom Grad $d \leq n$. D.h.: $p(x) \in P_n$ ist der Form

$$p(x) = \sum_{i=0}^{n} a_i x^i, \quad a_i \in \mathbb{K}, \quad a_d \neq 0, \quad a_{d+k} = 0, \quad k = 1, .., n-d$$

Wir betrachten die Division von $p(x)$ durch ein Polynom $q(x)$ ersten Grades. Dazu setzen wir $p_0(x) = p(x)$, $q(x) = x - a \quad a \in \mathbb{K}$ und verwenden den euklidischen Algorithmus:

$$\begin{aligned}
&p_0(x) = (x-a)p_1(x) + b_0,\\
&p_1(x) = (x-a)p_2(x) + b_1,\\
&\vdots\\
&p_{n-1}(x) = (x-a)p_n(x) + b_{n-1},\\
&p_n(x) = b_n
\end{aligned}$$

Die obige Iteration bricht ab, weil $p(x) \in P_n[x]$ und wir haben $p_n(x) = b_n \in \mathbb{K}$.
Durch Rücksubstitution erhalten wir eine Darstellung des Polynoms nach Potenzen von $(x - a)$:

$$\begin{aligned}
&p_0(x) = b_0 + (x-a)p_1(x)\\
&p_0(x) = b_0 + b_1(x-a) + p_2(x)(x-a)^2\\
&p_0(x) = b_0 + b_1(x-a) + b_2(x-a)^2 + p_3(x)(x-a)^3\\
&\vdots\\
&p_0(x) = b_0 + b_1(x-a) + b_2(x-a)^2 + \cdots + b_n(x-a)^n.
\end{aligned}$$

Damit haben wir, konstruktiv, eine Abbildung von $P_n[x]$ in $P_n[x-a]$ definiert. Diese Abbildung heißt Translation.

Das erhaltene Polynom entspricht dem n-ten Taylorpolynom von $p(x)$ in a und wir haben ein Polynom, das die eingangs formulierte Approximationsaufgabe löst. Ein Beweis dieser letzten Aussage wird im Rahmen der Übung bzw. Übungsaufgaben formuliert.

Die Koeffizienten $b_i \in \mathbb{K}$ lassen sich, unter Verwendung des Horner-Schemas berechnen.

Das Horner-Schema entsteht als Abstraktion des Polynomdivisions-Algorithmus-Schemas. Wir zeigen es in drei Schritten für $p(x), q(x) \in P_3[x]$ über $\mathbb{R}$ mit

$$p(x) = p_0(x) = x^3 - 6x^2 + 11x - 6, \qquad q(x) = x - 1$$

I.

$$\begin{array}{l}
x^3 - 6x^2 + 11x - 6 : \quad x - 1 = x^2 - 5x + 6 = p_1(x) \\
\underline{-x^3 + x^2} \\
0 - 5x^2 + 11x \\
\underline{\quad +5x^2 - 5x} \\
\qquad 0 \ + 6x - 6 \\
\underline{\qquad\qquad - 6x + 6} \\
\qquad\qquad 0 \quad + 0 = b_0
\end{array}$$

II.

$$\begin{array}{l}
1 \ \text{-6} \ 11 \ \text{-} \ 6 \ \boxed{1} \ 1 \ \text{-5} \ 6 \\
\underline{\text{-1} \ \boxed{1}} \\
0 - 5 + 11 \\
\underline{\quad 5 \boxed{\text{-5}}} \\
\qquad 0 \ + 6 - 6 \\
\underline{\qquad\qquad \text{-6} \boxed{6}} \\
\qquad\qquad 0 \quad \boxed{0}
\end{array}$$

III.

	1	-6	11	-6
$\boxed{1}$	0	1	-5	6
	1	-5	6	0

Die erste Zeile enthält die Koeffizienten von $p_0(x)$. Die zweite wird aus Teilergebnisse gebildet. Die dritte enthält die Koeffizienten von $p_1(x)$ und b_0. Iterativ, erhält man

$$b_1 = 2, b_2 = -3, b_3 = 1$$

und damit

$$2(x-1) - 3(x-1)^2 + (x-1)^3$$