Technische Universität Berlin **WS 06/07**
Institut für Mathematik
Sekr. MA 8-2 / Frau Schubert

Albrecht Gündel-vom Hofe
Wiebke Wittmüß

1. Übung Analysis II

Abgabe: Dienstag, den 24.10.2006

1. Aufgabe (5 Punkte)
Wir betrachten $f\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ definiert durch

$$f(x,y) = \begin{cases} \frac{x^3 y}{x^6+y^2} & \text{falls } (x,y) \neq (0,0) \\ 0 & \text{falls } (x,y) = (0,0) \end{cases}$$

Man beweise, dass f selbst in $(0,0)$ unstetig ist, aber entlang jeder - d.h. eingeschränkt auf - Geraden durch (0,0) stetig.

2. Aufgabe (5 Punkte)
Es sei $C([a,b])$ wie üblich der Raum der stetigen Funktionen auf $[a,b]$. Wir definieren die Supremumsnorm durch $\|f\|_\infty = \sup_{x\in[a,b]} |f(x)|$.

(i) Man weise nach, dass $\|\cdot\|_\infty$ eine Norm auf $C([a,b])$ definiert.

(ii) Mit Hilfe der Supremumsnorm erhalten wir eine Metrik d_∞ auf $C([0,1])$. Wir nutzen diese Metrik, um zu definieren, wann eine Folge $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ aus $C([0,1])$ konvergiert. Konvergiert die Folge $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ gegeben durch

$$f_n(x) = \begin{cases} 1 - nx & x \leq \frac{1}{n} \\ 0 & x > \frac{1}{n} \end{cases}$$

bezüglich d_∞?

3. Aufgabe (5 Punkte)
Man zeige direkt (also mit Hilfe der Definition), dass $x \mapsto \sqrt{x}$ auf $[0,1]$ gleichmäßig stetig, aber nicht Lipschitzstetig ist.