Technische Universität Berlin
Institut für Mathematik
Sekr. MA 8-2 / Frau Schubert

WS 06/07
Ausgabe: 09.01.2007
Abgabe: 16.01.2007

Albrecht Gündel vom Hofe
Jose Mendez

11. Übung zur Analysis II

1. (a) Seien $I :=]a, \infty[\subset \mathbb{R}$ sowie $f : I \longrightarrow \mathbb{R}$ und $g : I \longrightarrow \mathbb{R}$ differenzierbar mit $g'(x) \neq 0$ für alle $x \in I$. Ausserdem sei

$$\lim_{x \to +\infty} f(x) = \lim_{x \to +\infty} g(x) = 0$$

Zeigen Sie:
Wenn

$$\lim_{x \to +\infty} f'(x)/g'(x)$$

existiert, dann existiert auch

$$\lim_{x \to +\infty} f(x)/g(x)$$

und die beiden Grenzwerte sind gleich.
Tip: Substituiere $y = 1/x$

(b) Sei

$$\lim_{x \to a^+} f(x) = \lim_{x \to a^+} g(x) = \infty$$

Der Grenzwert

$$\lim_{x \to a^+} f(x)/g(x)$$

existiert, wenn der Grenzwert

$$\lim_{x \to a^+} f'(x)/g'(x)$$

existiert (2. Regel von l'Hospital). Begründen Sie, warum der Versuch, diese Regel unter Anwendung der ersten Regel von l'Hospital für den Fall 0/0 mit den Funktionen $F(x) = 1/f(x)$ und $G(x) = 1/g(x)$ zu beweisen, nicht zum Ziel führt?

(5 Punkte)

2. (a) (Präsentationsaufgabe) Man zeige durch Angabe eines Beispiels, dass der 1. Mittelwertsatz der Differentialrechnung für stetig differenzierbare Wege $\gamma : I \longrightarrow \mathbb{R}^2$ mit $I = [a, b] \subset \mathbb{R}$ im Allgemeinen nicht gilt. Begründen Sie, dass es für $t_1, t_2 \in I$ aber stets ein $\tau \in [t_1, t_2]$ gibt, so dass $\gamma'(\tau)$ parallel zu $\gamma(t_2) - \gamma(t_1)$ ist.

(b) Zeigen Sie durch Angabe eines Gegenbeispiels dass letztere Aussage im Fall $n \geq 3$ im Allgemeinen auch nicht mehr gilt.

(5 Punkte)

3. Sei $\mathcal{D} \subseteq \mathbb{R} \times \mathbb{R}$ offen mit $\mathbf{0} \in \mathcal{D}$ und $f : \mathcal{D} \longrightarrow \mathbb{R}$ definiert als

$$\mathbf{x} \mapsto \begin{cases} x_1 x_2 \frac{{x_1}^2 - {x_2}^2}{{x_1}^2 + {x_2}^2} & \mathbf{x} \neq \mathbf{0} \\ 0 & \text{sonst} \end{cases} \tag{1}$$

Untersuchen Sie ob

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x_1 \partial x_2} = \frac{\partial^2 f}{\partial x_2 \partial x_1}$$

auf ganz $\mathcal{D}$ gilt.

(5 Punkte)

4. (a) Bestimmen Sie $a \in \mathbb{R}$ so dass das Integral

$$\int_o^\infty e^{-t^a} dt$$

existiert und verwenden Sie dann die Gammafunktion um dieses Integral auszudrücken.

(b) Berechnen Sie

$$G(a, b) = \int_0^\infty t^b e^{-t^a} dt.$$

(5 Punkte)