**Technische Universität Berlin**
**Institut für Mathematik**
**Sekr. MA 8-2 / Frau Schubert**

WS 06/07
Ausgabe: 16.01.2007
Abgabe: 23.01.2007

**Albrecht Gündel vom Hofe**
**Jose Mendez**

# 12. Übung zur Analysis II

1. (a) Sei $G \subset \mathbb{R}^n$ konvex und

$$f : \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}^m$$
$$\mathbf{x} \longmapsto \mathbf{x}A^T + \mathbf{a}$$

eine affin-lineare Abbildung mit Matrix $A$ in $\mathcal{M}_{m,n}(\mathbb{R})$ und $\mathbf{a} \in \mathbb{R}^m$. Zeigen Sie: $H = f(G) \subset \mathbb{R}^n$ ist konvex.

(b) Sei $G \subset \mathbb{R}^n$ offen und konvex,

$$F : G \longrightarrow \mathbb{R}^n$$

stetig differenzierbar mit $||J_F(x) - E_n|| < 1$ in $G$. Man beweise, dass $F$ injektiv ist.

(5 Punkte)

2. (Präsentationsaufgabe)

(a) Definieren Sie eine algebraische Parametrisierung des Einheitskreises

$$K := \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x^2 + y^2 = 1, \}$$

indem Sie eine Gerade $G$ skizzieren, die durch $P = (-1, 0)$ und einen Punkt $Q = (x, y) \in K$ geht, und dem jeweiligen Schnittpunkt $T$ von $G$ mit der $y-Achse$ zur Definition der Parametrisierung verwenden.

(b) Berechnen Sie dann die Länge des Bogens $B$, der durch die Schnittpunkte $Q_1 = (0, 1)$ und $Q_2 = (1, 0)$ von $G$ mit $K$ bestimmt wird mittels der in $a)$ gewonnenen Parametrisierung.

(c) Vergleichen Sie Ihr Ergebnis von $b)$ mit der Länge des gleichen Bogens, die man unter Verwendung einer trigonometrischen Parametrisierung $\alpha(t)$ erhält.

(5 Punkte)

3. Definieren Sie eine algebraische Parametrisierung der Einheitskugel

$$K := \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : x^2 + y^2 + z^2 = 1, \}$$

indem Sie die in $a$) angegebene Methode anpassen: Definieren Sie $P = (u, v, 0)$ auf der $x, y-$Ebene und eine Gerade $G$ durch $P$ und $Q = (0, 0, 1)$. Zeigen Sie, dass $G$ durch $(tu, tv, 1 - t)$ parametrisiert wird, und wenden Sie die Substitution

$$x = tu, y = tv, z = 1 - t$$

in $x^2 + y^2 + z^2 = 1$ an.

Bem.: Diese Methode kann weiter angepasst, werden um eine $n-$dimensionale Kugel zu parametrisieren.

(5 Punkte)

4. Sei $f : [a, b] \longrightarrow \mathbb{R}$ zweimal differenzierbar mit $f''(x) \geq 0$ für alle $x \in [a, b]$.

   (a) Zeige Sie: Der Graph $\Gamma_f$ von $f$ liegt auf oder oberhalb der Tangente in einem beliebigen Punkt $P = (\xi, f(\xi)) \in \Gamma_f$.

   (b) Zeigen Sie: Für alle $x_1, x_2 \in [a, b]$ gilt:

$$f\left(\frac{x_1 + x_2}{2}\right) \leq \frac{f(x_1)}{2} + \frac{f(x_2)}{2}$$

Bem.: $f$ heisst in diesem Fall konvex.