Technische Universität Berlin **WS 06/07**
Institut für Mathematik
Sekr. MA 8-2 / Frau Schubert

Albrecht Gündel-vom Hofe
Wiebke Wittmüß

2. Übung Analysis II

Abgabe: Dienstag, den 31.10.2006

1. Aufgabe (5 Punkte)

In der folgenden Aufgabe betrachten wir noch einmal komplexe Zahlen.

(i) Es seien $z_0, \ldots, z_{n-1}$ die n-ten Einheitswurzeln. Man zeige, dass gilt

$$z_0 + \ldots + z_{n-1} = 0.$$

(ii) Man berechne alle Lösungen von

$$z^6 + 2iz^5 - z^4 - 81z^2 - 162iz + 81 = 0.$$

2. Aufgabe (5 Punkte)

Nach Satz 2.1.21 gilt für abgeschlossene Mengen A und B, dass auch $A \cup B$ und $A \cap B$ abgeschlossen sind. Inwieweit kann man das auf die Vereinigung (den Schnitt) endlich vieler, abzählbar vieler oder beliebig vieler abgeschlossener Mengen übertragen? (Man gebe jeweils die relevanten Beweise/Gegenbeispiele an.)

3. Präsentationsaufgabe (5 Punkte)

Wir definieren auf einer beliebigen Menge X

$$d(x, y) = \begin{cases} 0 & x = y \\ 1 & x \neq y \end{cases}$$

(i) Man zeige, dass d eine Metrik definiert (d heißt *diskrete Metrik*).

(ii) Man zeichne für den Spezialfall $X = \mathbb{R}^2$ die ε-Umgebungen um $x_0 = (2, 3)$ mit $\varepsilon = 1/2$ bzw. $\varepsilon = 2$.

(iii) Welche Mengen sind bezüglich d offen?

(iv) Man zeige, dass für jede Teilmenge $A \subset X$ die Funktion $I_A : X \to \mathbb{R}$ definiert durch

$$I_A(x) = \begin{cases} 1 & x \in A \\ 0 & x \notin A \end{cases}$$

stetig bezüglich d ist.

4. Aufgabe (5 Punkte)

Man untersuche mit Hilfe der Definition, welche der folgenden Mengen kompakt sind.

(i) $K + L = \{k + l \,|\, k \in K, l \in L\}$ für gegebene kompakte Mengen K und L,

(ii) $B_1(0) = \{x \in \mathbb{R}^n | \, |x| \leq 1\}$, wobei $|\cdot|$ die euklidische Norm ist,

(iii) $\{1/2^n | n \in \mathbb{N}\}$,

(iv) $\{1/2^n | n \in \mathbb{N}\} \cup \{0\}$.