Technische Universität Berlin **WS 06/07**
Institut für Mathematik
Sekr. MA 8-2 / Frau Schubert

Albrecht Gündel-vom Hofe
Wiebke Wittmüß

3. Übung Analysis II

Abgabe: Dienstag, den 6.11.2006

1. Aufgabe (5 Punkte)
Es sei U eine offene Menge im $\mathbb{R}^n$, die ein Gebiet ist. Man zeige, dass man dann U nicht in zwei nichtleere, offene, disjunkte Teilmengen zerlegen kann.

2. Aufgabe (5 Punkte)
Man untersuche mit der Überdeckungseigenschaft, welche der folgenden Mengen kompakt sind.

(i) $K + L = \{k + l \,|\, k \in K, l \in L\}$ für gegebene kompakte Mengen K und L,

(ii) $B_1(0) = \{x \in \mathbb{R}^n \,|\, |x| \leq 1\}$, wobei $|\cdot|$ die euklidische Norm ist,

(iii) $\{1/2^n \,|\, n \in \mathbb{N}\}$,

(iv) $\{1/2^n \,|\, n \in \mathbb{N}\} \cup \{0\}$.

3. Aufgabe (5 Punkte)
Es seien X und Y nichtleere Mengen. Wir bezeichnen mit 2^X die Potenzmenge von X, d.h. die Menge aller Teilmengen von X.

(i) Man zeige, dass 2^X eine Topologie auf X ist und $\{\emptyset, Y\}$ eine Topologie auf Y.

(ii) Man zeige, dass $f : Y \to X$ genau dann stetig ist, wenn f konstant ist.

(iii) Man bestimme alle (überdeckungs-)kompakten Teilmengen von X bzw. Y.

4. Präsentationsaufgabe (5 Punkte)

(i) Man zeige, dass jede monotone Funktion $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ integrierbar ist.

(ii) Man berechne das Integral

$$\int_a^b x^\alpha \, dx,$$

wobei $0 < a < b$ und $\alpha \neq -1$ sein sollen.

(Tipp: Als n-te Zerlegung verwende man die Punkte $t_k = a \sqrt[n]{(b/a)^k}$, $k = 0, \dots, n$. Weiterhin darf verwendet werden, dass

$$\lim_{n\to\infty} \frac{\sqrt[n]{x} - 1}{\sqrt[n]{x^{\alpha+1}} - 1} = \frac{1}{\alpha + 1}$$

gilt.)