Technische Universität Berlin **WS 06/07**
Institut für Mathematik
Sekr. MA 8-2 / Frau Schubert

Albrecht Gündel-vom Hofe
Wiebke Wittmüß

5. Übung Analysis II

Abgabe: Dienstag, den 21.11.2006

Die Vorlesung findet ab 20.11. im MA 043 statt.

1. Aufgabe (5 Punkte)

Wir betrachten eine Funktion $f : [0,1] \to \mathbb{R}$ gegeben durch

$$f(x) = \begin{cases} 0, & \text{für } x \notin \{x_1, \dots, x_n\} \\ y_i, & \text{für } x = x_i, i = 1, \dots, n \end{cases}$$

wobei $n \in \mathbb{N}$, $x_i \in [0,1]$ und $y_i \in \mathbb{R}$ für $i = 1, \dots, n$. Man zeige, dass f integrierbar ist und berechne $\int_0^1 f(x)\,dx$.

2. Aufgabe (5 Punkte)

Es sei $f : [0,1] \to \mathbb{R}$ gegeben durch

$$f(x) = \begin{cases} x \sin \frac{\pi}{2x}, & \text{für } x \neq 0 \\ 0, & \text{für } x = 0. \end{cases}$$

a) Man zeige zunächst, dass f stetig ist.

b) Man gebe eine Parametrisierung des Graphen von f zwischen $(1,1)$ und $(0,0)$ an.

c) Für $n \in \mathbb{N}$ definieren wir die Zerlegung $\zeta_n = \{t_0, \dots, t_n\}$ von $[0,1]$ durch

$$t_k = \frac{2k}{2k+1} \text{ für } k = 0, \dots, n-1 \text{ und } t_n = 1.$$

Man zeige mit Hilfe der Zerlegungsfolge $(\zeta_n)_{n \in \mathbb{N}}$, dass der Graph von f nicht rektifizierbar ist.

3. Präsentationsaufgabe (5 Punkte)

Sei nun $f : [0,1] \to \mathbb{R}$ gegeben durch

$$f(x) = \begin{cases} x(1 + x \sin \frac{\pi}{2x}), & \text{für } x \neq 0 \\ 0, & \text{für } x = 0. \end{cases}$$

a) Man zeige, dass f differenzierbar ist, wobei $f'(0) > 0$.

b) Man zeige, dass es in jeder Nullumgebung Intervalle gibt, auf denen f streng monoton fallend ist.

c) Man zeige, dass f nicht stetig differenzierbar in 0 ist.

4. Aufgabe (5 Punkte)

Es seien f und g auf $[a,b]$ differenzierbare Funktionen. Man beweise die folgenden Aussagen.

a) Falls $f(a) \leq g(a)$ und $f'(x) < g'(x)$ für alle $x \in (a,b)$, dann gilt $f(x) < g(x)$ für alle $x \in (a,b)$.

b) Gilt $f(a) < g(a)$ und $f'(x) \leq g'(x)$ für alle $x \in (a,b)$, so folgt $f(x) < g(x)$ für alle $x \in (a,b)$.

c) Es gilt $\tan x > x$ für alle $x \in (0, \pi/2)$.