Technische Universität Berlin **WS 06/07**
Institut für Mathematik
Sekr. MA 8-2 / Frau Schubert

Albrecht Gündel-vom Hofe
Wiebke Wittmüß

6. Übung Analysis II

Abgabe: Dienstag, den 28.11.2006

Vorlesung und Übung finden ab jetzt im MA 043 statt.

1. Präsentationsaufgabe (5 Punkte)
Wir betrachten die Kurven $\gamma_1, \gamma_2 : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ gegeben durch

$$\gamma_1(t) = (e^t \cos t, e^t \sin t) \text{ und } \gamma_2(t) = (r \cos t, r \sin t).$$

für festes $r > 0$.

a) Man skizziere γ_1 und γ_2.

b) Man berechne die Einheitstangentialvektoren für γ_1 und γ_2.

c) Man berechne alle Schnittpunkte von γ_1 und γ_2.

d) Man berechne die zugehörigen Schnittwinkel zwischen γ_1 und γ_2. Wie geht r in den Schnittwinkel ein?

2. Aufgabe (5 Punkte)
Wir betrachten $\gamma : [0, \infty) \to \mathbb{R}^2$ gegeben durch $\gamma(t) = e^{-t}(\cos t, -\sin t)$. (Vergleiche γ_1 aus Aufgabe 1.)

Wir wollen die Bogenlänge von γ berechnen.

a) Dazu beweise man zunächst mit Hilfe geeigneter Riemann-Summen, dass $\int_a^b e^{-t} dt = e^{-a} - e^{-b}$ gilt.

b) Dann berechne man die Bogenlänge für $\gamma|_{[0,n]}$.

c) Schließlich schlussfolgere man daraus über eine Grenzwertbetrachtung die Bogenlänge von γ.

3. Aufgabe (5 Punkte)

a) Man berechne die Ableitungen von

$$\frac{1}{x} \qquad \text{und} \qquad \frac{1}{\sqrt[n]{x}} \qquad (n \in \mathbb{N})$$

mit Hilfe der Definition.

b) Man bestimme die Ableitung der Funktion $\ln x$, indem man die Definition des Logarithmus $\ln x = \int_0^x 1/u\,du$ benutzt und den Mittelwertsatz der Integralrechnung anwendet.

4. Aufgabe (5 Punkte)

Man berechne die Ableitungen der folgenden Funktionen und vereinfache soweit wie möglich.

a)

$$f(x) = x^{\sin x}$$

b)

$$g(x) = \ln(\sin(\sqrt{x^2+1}))$$

c)

$$h(t) = e^{c\,t}, \; c \in \mathbb{C}$$

d)

$$i(x) = \frac{\sqrt{x}\sin x}{\ln x}$$

e)

$$j(x) = \operatorname{artanh} x.$$