Technische Universität Berlin **WS 06/07**
Institut für Mathematik
Sekr. MA 8-2 / Frau Schubert

Albrecht Gündel-vom Hofe
Wiebke Wittmüß

8. Übung Analysis II

Abgabe: Dienstag, den 12.12.2006

1. Präsentationsaufgabe Teil I (5 Punkte)
Es sei $f\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$, $f(x,y) = (u(x,y), v(x,y))$ eine Funktion, die die Cauchy-Riemannschen-Differentialgleichungen

$$u_x = v_y \qquad\qquad u_y = -v_x$$

erfüllt.

Man beweise, dass für jedes $a \in \mathbb{R}^2$ die Ableitung $Df(a)$ eine Drehstreckung definiert. Man berechne den Streckungsfaktor und den Drehwinkel dieser Abbildung.

2. Aufgabe (5 Punkte)
Es sei $n \in \mathbb{N}$. Wir definieren die (n-dimensionale) Polarkoordinatenabbildung $P_n\colon \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ durch

$$\begin{aligned} P_n(r, \varphi_1, \ldots, \varphi_{n-1}) = (&r\cos\varphi_1\cos\varphi_2\ldots\cos\varphi_{n-1},\ r\sin\varphi_1\cos\varphi_2\ldots\cos\varphi_{n-1},\\ &r\sin\varphi_2\ldots\cos\varphi_{n-1},\ \ldots\ ,\ r\sin\varphi_{n-2}\cos\varphi_{n-1},\ r\sin\varphi_{n-1}) \end{aligned}$$

a) Man gebe eine rekursive Darstellung für P_n.

b) Man zeige $\| P_n(r, \varphi_1, \ldots, \varphi_{n-1}) \| = |r|$

c) Man berechne die Jacobimatrix J_{n+1} von P_{n+1} und zeige, dass die Spalten der Jacobimatrix ein Orthogonalsystem bilden.

d) Aus c) folgt insbesondere, dass $J_{n+1}^T J_{n+1} = D$ für eine Diagonalmatrix D ist. Man nutze dies, um

$$\det J_{n+1}(r, \varphi_1, \ldots, \varphi_n) = r^n \prod_{k=2}^{n} \cos^{k-1}\varphi_k$$

zu zeigen.

3. Aufgabe (5 Punkte)

a) Es sei $x_0 \in \mathbb{R}^n$, $n \geq 2$ gegeben. Wir definieren die Funktion $u_n \colon \mathbb{R}^n \setminus \{x_0\} \to \mathbb{R}$ wie folgt.

$$u_n(x) = \begin{cases} \ln(\|x - x_0\|) & n = 2 \\ 1/\|x - x_0\|^{n-2} & n \geq 3. \end{cases}$$

Man zeige, dass u_n für $n \geq 2$ eine harmonische Funktion ist.

b) Man zeige, dass $F \colon \mathbb{R}^n \times (0, \infty) \to \mathbb{R}$ gegeben durch

$$F(x,t) = t^{-n/2} \exp\left(\frac{-\|x\|^2}{4t}\right)$$

die Wärmeleitungsgleichung

$$\frac{\partial F}{\partial t}(x,t) = \sum_{k=1}^{n} \frac{\partial^2 F}{\partial x_k^2}(x,t)$$

löst.

4. Präsentationsaufgabe Teil II (5 Punkte)

Es sei $f \colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ eine differenzierbare Funktion mit $f_x(x,y) + f_y(x,y) = 0$. Man zeige, dass es eine Funktion $g \colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ mit $f(x,y) = g(x-y)$ gibt.