TU Berlin, Institut für Mathematik MA 4-5
Thomas Slawig, Uwe Prüfert

Zahlendarstellung auf dem Rechner (1)

Zahlensysteme

b-adisches Zahlensystem: $b \in \mathbb{N}, b > 1$.
Alphabet $\Sigma_b := \{0, 1, \dots, b-1\}$.
Beispiele:
$b = 10$: Dezimal-, $b = 2$: Dual-/Binär-, $b = 8$: Oktal-, $b = 16$: Hexadezimalsystem ($\Sigma_{16} := \{0, 1, \dots, 9, A, B, C, D, E, F\}$), 12er-, 60er-System (Uhrzeit).
Eine feste "Wort"-Länge erreicht man durch führende Nullen: $(01234)_b$.
Wir definieren die Abbildungen:

$$\begin{aligned} \operatorname{div}: &\quad \mathbb{N} \times \mathbb{N} \to \mathbb{N}, \quad (z, b) \mapsto z \operatorname{div} b := \max\{k \in \mathbb{N} : k \le z/b\} \\ \operatorname{mod}: &\quad \mathbb{N} \times \mathbb{N} \to \Sigma_b, \quad (z, b) \mapsto z \operatorname{mod} b := z - (z \operatorname{div} b) \cdot b. \end{aligned}$$

(ganzzahlige Division ohne Rest und Rest der ganzzahligen Division).
Es gilt f.a. $z \in \mathbb{N}$:

$$z = (z \operatorname{div} b) \cdot b + z \operatorname{mod} b.$$

Satz: Natürliche Zahlen können in jedem b-adischen Zahlensystem eindeutig dargestellt werden: Sei $b \in \mathbb{N}, b > 1$ gegeben. Dann gilt:

$$\forall z \in \mathbb{N} \quad \exists n \in \mathbb{N} \quad \exists! z_i \in \Sigma_b, i = 0, \dots, n-1 : \qquad z = \sum_{i=0}^{n-1} z_i b^i. \tag{1}$$

Ziffernschreibweise: $z = (z_{n-1} \dots z_1 z_0)_b$.
Beweis:
1. Existenz (über vollst. Ind.):
Induktionsanfang: $z < b$ hat Darstellung $z = (0 \dots 0 z_0)$ mit $z_0 = z$.
Induktionsvoraussetzung: Die Aussage sei wahr für die Zahlen $0, \dots, z-1$, d.h. diese Zahlen haben eine Darstellung (1).
Induktionsschluss: Zu zeigen ist, dass jetzt auch z (mit $z \ge b$) eine Darstellung (1) hat.
Es gilt:

$$(z \operatorname{div} b) \cdot b \le z$$

und damit wegen $b > 1$:

$$z' := z \operatorname{div} b < z,$$

d.h. es existiert nach I.V. die Darstellung

$$z' := \sum_{i=0}^{n-1} z'_i b^i, z'_i \in \Sigma_b.$$

Außerdem:

$$z'b \le z < b^n \Rightarrow z' < b^{n-1} \Rightarrow z'_{n-1} = 0 \Rightarrow z' = \sum_{i=0}^{n-2} z'_i b^i,$$

denn sonst

$$z' = \underbrace{z'_{n-1} b^{n-1}}_{\ge b^{n-1}, \text{wenn } z'_{n-1} \ge 1} + \sum_{i=0}^{n-2} \underbrace{z'_i b^i}_{\ge 0} \quad \ge \quad b^{n-1}.$$

Es gilt:

$$z = z'b + z \operatorname{mod} b = \left(\sum_{i=0}^{n-2} z'_i b^i\right) b + z \operatorname{mod} b = \sum_{i=0}^{n-2} z'_i b^{i+1} + z \operatorname{mod} b = \sum_{i=1}^{n-1} \underbrace{z'_{i-1}}_{=:z_i} b^i + \underbrace{z \operatorname{mod} b}_{=:z_0} = \sum_{i=0}^{n-1} z_i b^i,$$

d.h. z hat Darstellung (1).

2. Eindeutigkeit:
Annahme: $z = (z_{n-1} \dots z_1 z_0)_b = (\bar{z}_{n-1} \dots \bar{z}_1 \bar{z}_0)_b$.
Sei $l := \max\{i = 0, \dots, n-1 : z_i \ne \bar{z}_i\}$, also $z_i = \bar{z}_i$ f.a. $i = l+1, \dots, n-1$. Daher gilt

$$\sum_{i=l+1}^{n-1} z_i b^i = \sum_{i=l+1}^{n-1} \bar{z}_i b^i,$$

also auch

$$\sum_{i=0}^{l} z_i b^i = \sum_{i=0}^{l} \bar{z}_i b^i,$$

d.h.

$$\sum_{i=0}^{l-1} z_i b^i + z_l b^l = \sum_{i=0}^{l-1} \bar{z}_i b^i + \bar{z}_l b^l.$$

O.B.d.A. sei $z_l > \bar{z}_l$. Dann folgt

$$\sum_{i=0}^{l-1} (\bar{z}_i - z_i) b^i = \underbrace{(z_l - \bar{z}_l)}_{\ge 1} b^l \ge b^l.$$

Andererseits

$$\sum_{i=0}^{l-1} (\bar{z}_i - z_i) b^i \le \sum_{i=0}^{l-1} \underbrace{|\bar{z}_i - z_i|}_{\le b-1} b^i \le (b-1) \sum_{i=0}^{l-1} b^i = (b-1) \frac{b^l - 1}{(b-1)} = b^l - 1 < b^l$$

im Widerspruch zu oben. □

Darstellung ganzer Zahlen auf dem Rechner

Ganze Zahlen (engl.: integer numbers, integers).
Auf dem Rechner: Zweiersystem, $b = 2$, (1 Stelle = 1 Bit).

1. Möglichkeit: "$\mathbb{Z} = \mathbb{N}$ + Vorzeichen":

$$z = (-1)^\nu \sum_{i=0}^{n-2} z_i 2^i, \quad \nu, z_i \in \Sigma_2 = \{0, 1\}, i = 0, \dots, n-2$$

   mit $z_{n-1} = \nu$ (Vorzeichenbit) benutzt man n Bits.

2. Möglichkeit: $z \ge 0$: mit $z_i, i = 0, \dots, n-2$ wie oben, d.h. mit $z_{n-1} = 0$.
   $z < 0$ im *Zweierkomplement*: $\tilde{z} := |z| > 0$ hat die Darstellung

$$\tilde{z} = \sum_{i=0}^{n-2} \tilde{z}_i 2^i, \quad \text{gespeichert als Bitmuster} \quad (0\, \tilde{z}_{n-2} \cdots \tilde{z}_0).$$

   Als *Zweierkomplement* von $\tilde{z}$ bezeichnet man die Zahl

$$\bar{\tilde{z}} := \sum_{i=0}^{n-2} (1 - \tilde{z}_i) 2^i - 2^{n-1}, \quad \text{gespeichert als} \quad (1,\, (1 - \tilde{z}_{n-2}), \cdots, (1 - \tilde{z}_0)), \text{ erhalten durch Bitumkehr von } \tilde{z}.$$

   Die führende 1 in dem Bitmuster $(1,\, (1-\tilde{z}_{n-2}), \cdots, (1-\tilde{z}_0))$ rechts wird in der binären Darstellung links sozusagen mit Minuszeichen versehen und entspricht dem Summanden -2^{n-1}.
   Es gilt (mit der Summenformel für die geom. Reihe)

$$\tilde{z} + \bar{\tilde{z}} = \sum_{i=0}^{n-2} 2^i - 2^{n-1} = \frac{1 - 2^{n-1}}{1 - 2} - 2^{n-1} = -1,$$

   also

$$\bar{\tilde{z}} + 1 = -\tilde{z} = -|z| = z.$$

   Die Darstellung von $z < 0$ ergibt sich also durch:
   1. Berechnen der Darstellung von $|z|$
   2. Bilden des Zweierkomplements dieser Darstellung
   3. Addieren von 1.