Technische Universität Berlin

Fakultät II – Institut für Mathematik WS 07/08
Prof. Dr. Tröltzsch 22.02.2008

Februar – Klausur
Analysis II

Name: .... Vorname: ....

Matr.–Nr.: .... Studiengang: ....

Keine Hilfsmittel (Handy, Taschenrechner, etc.) zugelassen.

Die Lösungen sind in **Reinschrift** auf A4 Blättern abzugeben. Für jede Aufgabe ist ein neues Blatt zu verwenden. Auf jedes Blatt Name und Matrikelnummer schreiben! Mit Bleistift geschriebene Klausuren können **nicht** gewertet werden.

Geben Sie immer den **vollständigen Rechenweg** an bzw. **begründen** Sie ihre Antworten.

Die Bearbeitungszeit beträgt **90 Minuten**.

Tip: Beginnen Sie mit den Aufgaben(teilen), die Ihnen am leichtesten fallen. Die Aufgaben sind nach Themengebieten geordnet.

Die Klausur ist mit 15 von 30 Punkten bestanden.

Zur Nachklausur ist zugelassen, wer mindestens 5 Punkte erzielt.

Korrektur

1	2	3	4	5	6	Σ

1. Aufgabe
4 Punkte

Es sei $d : \mathbb{R} \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ eine Metrik auf $\mathbb{R}$. Zeigen Sie, dass durch

$$d_n(x, y) := \sum_{i=1}^{n} d(x_i, y_i)$$

eine Metrik auf dem $\mathbb{R}^n$ gegeben ist.

2. Aufgabe
5 Punkte

(i) Es seien (X, d_X) und (Y, d_Y) metrische Räume.

Definieren Sie den Begriff "Gleichmäßige Konvergenz" einer Folge f_k von Abbildungen von X nach Y gegen $f : X \to Y$.

(ii) Es seien nun $X = Y = \mathbb{R}$ versehen mit der Standardmetrik auf $\mathbb{R}$.

Untersuchen Sie die folgenden Funktionenfolgen auf punktweise und gleichmäßige Konvergenz:

$$f_n(x) = \frac{n^2}{n^2 + \sin(nx)},$$

$$g_n(x) = \frac{nx}{\sqrt{n^2x^2 + 1}}.$$

3. Aufgabe

3 Punkte

Wir betrachten den metrischen Raum $\mathbb{R}$ versehen mit der Standardmetrik. Gegeben ist die Menge

$$A = \{x : \sin x = 0\}$$

und eine Familie $(U_z)_{z\in\mathbb{R}}$ von offenen Mengen $U_z := \mathbb{R} \setminus \{z\}$.

(i) Zeigen Sie, dass $(U_z)_{z\in\mathbb{R}}$ eine Überdeckung von A ist.

(ii) Zeigen Sie, dass man aus der Überdeckung $(U_z)_{z\in\mathbb{R}}$ eine endliche Überdeckung von A auswählen kann.

(iii) Ist A kompakt? Warum bzw. warum nicht?

4. Aufgabe

9 Punkte

Gegeben ist die Funktion $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ mit

$$f(x,y) = \begin{cases} x^2 + y^4 & \text{falls } x \neq 0 \text{ und } y \neq 0 \\ 0 & \text{sonst.} \end{cases}$$

(i) Wo ist f stetig? Wo ist f unstetig?

(ii) Bestimmen Sie die partiellen Ableitungen von f, wo diese existieren.

(iii) In welchen Punkten ist f differenzierbar? Wo ist f nicht differenzierbar?

5. Aufgabe

6 Punkte

Zeigen Sie, dass die Menge

$$M := \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : x^2 + y^2 = 1 \text{ und } x^2 + z^2 = 4\}$$

eine eindimensionale C^∞-Mannigfaltigkeit des $\mathbb{R}^3$ ist.

Bestimmen Sie eine lokale Parametrisierung $g : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ im Punkt $(0, 1, -2)$.

6. Aufgabe

3 Punkte

Lösen Sie das Anfangswertproblem

$$yy' + y^2x^2 = 0, \quad y(0) = -1.$$