Technische Universität Berlin

Fakultät II – Institut für Mathematik WS 07/08
Prof. Dr. Tröltzsch 08.04.2008

April – Klausur
Analysis II

Name: ..... Vorname: .....

Matr.–Nr.: ..... Studiengang: .....

Keine Hilfsmittel (Handy, Taschenrechner, etc.) zugelassen.

Die Lösungen sind in **Reinschrift** auf A4 Blättern abzugeben. Für jede Aufgabe ist ein neues Blatt zu verwenden. Auf jedes Blatt Name und Matrikelnummer schreiben! Mit Bleistift geschriebene Klausuren können **nicht** gewertet werden.

Geben Sie immer den **vollständigen Rechenweg** an bzw. **begründen** Sie ihre Antworten.

Die Bearbeitungszeit beträgt **90 Minuten**.

Tip: Beginnen Sie mit den Aufgaben(teilen), die Ihnen am leichtesten fallen. Die Aufgaben sind nach Themengebieten geordnet.

Die Klausur ist mit 15 von 30 Punkten bestanden.

Korrektur

1	2	3	4	5	6	Σ

1. Aufgabe

6 Punkte

Gegeben ist die folgende Abbildung $d : \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$

$$d(x,y) := |\{i \in \{1 \dots n\} : x_i \neq y_i\}| = \text{ Anzahl der Indizes } i \text{ für die } x_i \neq y_i.$$

(i) Zeigen Sie, dass d eine Metrik auf $\mathbb{R}^n$ ist.
Hinweis: Zeigen Sie, dass für $x, y, z \in \mathbb{R}^n$ gilt

$$\{i \in \{1 \dots n\} : x_i \neq y_i\} \subset \{i \in \{1 \dots n\} : x_i \neq z_i\} \cup \{i \in \{1 \dots n\} : y_i \neq z_i\}$$

(ii) Es sei $x \in \mathbb{R}^n$ gegeben. Berechnen Sie $B_{1/2}(x) = \{y : d(x,y) < 1/2\}$.
Begründen Sie, dass alle einelementigen Mengen offen in $(\mathbb{R}^n, d)$ sind.

2. Aufgabe

3 Punkte

Wir betrachten nun den metrischen Raum $(\mathbb{R}, d)$, wobei d die Standardmetrik ist.

Untersuchen Sie die Folge (f_n) von Funktionen von $\mathbb{R} \to \mathbb{R}$ auf punktweise und gleichmäßige Konvergenz:

$$f_n(x) = e^{\frac{|x|n}{|x|n+1}}.$$

3. Aufgabe

6 Punkte

(i) Es sei f eine Abbildung von einer offenen Menge G eines Banachraums V in einen Banachraum W.

Definieren Sie: f ist differenzierbar in $x \in G$.

(ii) Es sei $a \in \mathbb{R}^n \setminus \{0\}$. Gegeben ist die Funktion $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ mit

$$f(x) = \big(\langle a, x\rangle\big)^2.$$

Hierbei bezeichne $\langle \cdot, \cdot \rangle$ das euklidische Skalarprodukt auf dem $\mathbb{R}^n$.

Zeigen Sie anhand der Definition, dass f auf $\mathbb{R}^n$ differenzierbar ist.

4. Aufgabe

3 Punkte

Gegeben ist die Funktion $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f(x) = x + \cos x$. In welchen Punkten ist f lokal umkehrbar? Berechnen Sie dort die Ableitung der Umkehrfunktion.

5. Aufgabe

8 Punkte

Gegeben ist die Menge $M = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : \ xy = 1\}$.

(i) Zeigen Sie, dass M eine eindimensionale C^∞-Untermannigfaltigkeit des $\mathbb{R}^2$ ist.

(ii) Bestimmen Sie extremwertverdächtige Punkte der Funktion $f(x, y) = x^2 + y^2$ auf der Mannigfaltigkeit M.

Zeigen Sie, dass die Funktion f keine globalen Maxima auf der Menge M besitzt.

6. Aufgabe

4 Punkte

Bestimmen Sie eine Lösung des Anfangswertproblems

$$y' + x^2 y = x^2, \quad y(0) = 2.$$

Begründen Sie, warum dieses Problem eindeutig lösbar ist.