WS 2007/08
Prof. Dr. Fredi Tröltzsch
Dr. Daniel Wachsmuth

Technische Universität Berlin
Fakultät II
Institut für Mathematik

1. Übungsblatt Analysis II

Homepage: Ein regelmäßiges Besuchen der Homepage

`http://www.math.tu-berlin.de/Vorlesungen/WS07/Analysis2/`

wird empfohlen `;)`. Dort werden z.B. die Aufgabenblätter veröffentlicht.

Hausaufgaben: Zum Erlangen eines Übungsscheines ist die erfolgreiche Bearbeitung von Hausaufgaben und das Bestehen einer Klausur am Ende des Semesters erforderlich. Die Hausaufgaben werden in Zweiergruppen bearbeitet und müssen eine Woche später **vor** der Übung abgegeben werden. Sie werden dann korrigiert und bepunktet in den Tutorien der darauffolgenden Woche zurückgegeben.

Übungsaufgaben: [werden in der Übung am 22.10.07 besprochen]

1. Zeigen Sie, dass die diskrete Metrik eine Metrik ist. Was sind die offenen bzw. abgeschlossenen Mengen bezüglich dieser Metrik?

2. Es sei (X, d) ein metrischer Raum. Weiter sei $V = \prod_{i=0}^{\infty} X$ mit Punkten $v = (x_0, x_1, \dots)$ der Raum der Folgen mit Elementen aus X.

   (a) Zu zeigen ist, dass dann
   $$d_V : V \times V \to \mathbb{R}, \quad d_V(v, w) = \sum_{i=0}^{\infty} \frac{1}{2^i} \frac{d(v_i, w_i)}{1 + d(v_i, w_i)}$$
   eine Metrik auf V ist.

   (b) Es sei $j \in \mathbb{N}$ und $U_j \subset X$ eine offene Menge in (X, d). Wir setzen $U_k := X$ für $k \neq j$. Zeigen Sie, dass $U = \prod_{i=0}^{\infty} U_i$ eine offene Menge in (V, d_V) ist.

   (c) Seien $U_j \subset X$ offene Mengen in (X, d) für $j \in \mathbb{N}$. Belegen Sie durch ein Gegenbeispiel, dass im Allgemeinen die Menge $U = \prod_{i=0}^{\infty} U_i$ in (V, d_V) nicht offen ist.

Tutoriumsaufgaben: [werden in den Tutorien vom 23.10.07 bis 26.10.07 besprochen]

1. Skizzieren Sie die Einheitskugel im $\mathbb{R}^2$ zu verschiedenen Metriken d^p, $p \geq 1$. Was passiert für $p = 1/2$?

2. Sind die folgenden Abbildungen d Metriken auf X?

   (a) $X = \mathbb{R}, \quad d(x, y) = |x^p - y^p|$

   (b) $X = \mathbb{R}, \quad d(x, y) = |x - y|^p$

   (c) $X = \mathbb{N}, \quad d(x, y) = \frac{1}{m} + \frac{1}{n}$

   (d) $X = \mathbb{N}, \quad d(x, y) = \frac{|m-n|}{mn}$

   (e) $X = \mathbb{N}, \quad d(x, y) = \begin{cases} 0 & m = n \\ 1 + \frac{1}{m+n} & m \neq n \end{cases}$

Hausaufgaben: [abgeben am 29.10.07]

1. Sei X eine Menge, $d : X \times X \to \mathbb{R}$ eine Abbildung. Zeigen Sie, dass d genau dann eine Metrik auf X ist, wenn für alle $x, y, z \in X$ gilt: (4 Punkte)

   (a) $d(x, y) = 0 \Leftrightarrow x = y$

   (b) $d(x, z) \leq d(y, x) + d(z, y)$

2. Es sei $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ eine Abbildung. Unter welcher Zusatzvoraussetzung an f wird die Abbildung d, definiert durch $d(x,y) = |f(x) - f(y)|$, eine Metrik auf $\mathbb{R}$? (5 Punkte)

3. Es sei $X = C^0([0,1])$ die Menge aller auf $[0,1]$ stetigen Funktionen. Beweisen oder widerlegen Sie: (5 Punkte)

   (a) $d^1(f,g) := \int_0^1 |f(x) - g(x)|\, dx$ ist eine Metrik auf X,

   (b) $d^2(f,g) := |f(0) - g(0)|$ ist eine Metrik auf X.