WS 2007/08 — Technische Universität Berlin
Prof. Dr. Fredi Tröltzsch — Fakultät II
Dr. Daniel Wachsmuth — Institut für Mathematik

2. Übungsblatt Analysis II

Übungsaufgaben: [werden in der Übung am 29.10.07 besprochen]

1. Zu zeigen ist, dass der metrische Raum $(C^0([a,b]),\, d^{sup})$ vollständig ist.
2. Es sei $(f_n)_{n=1}^\infty$ eine Folge stetiger Funktionen, $f_n \in C([a,b])$, $|f_n(x))| \le a_n$.
   Konvergiert die Reihe $\sum a_n$, dann konvergiert die Funktionenreihe $\sum f_n$ auf $[a,b]$ gleichmäßig.
3. Es sei $(f_n)_{n=1}^\infty$ eine Folge stetiger Funktionen, die gleichmäßig gegen die Funktion f konvergiert.
   Dann konvergiert auch die Folge der Stammfunktionen $F_n(x) := \int_a^x f_n(t)\,dt$ gleichmäßig gegen $F(x) := \int_a^x f(t)\,dt$. Man kann also Integration und Grenzwertbildung vertauschen: $\lim_{n\to\infty} \left(\int_a^x f_n(t)\,dt\right) = \int_a^x \left(\lim_{n\to\infty} f_n(t)\right)\,dt$.
4. Es sei $(f_n)_{n=1}^\infty$ eine Folge stetig differenzierbarer Funktionen, deren Ableitungen f_n' gleichmäßig gegen die Funktion g konvergieren.
   Konvergiert für ein $x_0 \in [a,b]$ die Folge $(f_n(x_0))_{n=1}^\infty$, dann gilt: f_n konvergiert gegen eine stetig differenzierbare Funktion f, deren Ableitung g ist, $f' = g$. Man kann also Differentiation und Grenzwertbildung vertauschen: $\lim_{n\to\infty} f_n'(x) = (\lim_{n\to\infty} f_n(x))'$.

Tutoriumsaufgaben: [werden in den Tutorien vom 30.10.07 bis 02.11.07 besprochen]

1. Wir bezeichnen mit A' die Menge der Häufungspunkte einer Menge A. Finden Sie die Ableitung A', die Abschließung $\bar{A}$ und das Innere A^o der folgenden Mengen:
   $A = \bigcup_{n=1}^\infty \left\{\frac{1}{n}, \frac{n}{n+1}, \frac{2n}{n+1}\right\}$, $A = \bigcup_{n=1}^\infty \left\{\frac{2n-3}{3n+1}\right\}$, $A = \mathbb{Q}$, $A = \bigcap_{n=1}^\infty \left[-\frac{1}{n}, 1+\frac{1}{n}\right]$.
2. Sei x ein Häufungspunkt von M. Dann liegen in jeder Umgebung von x unendlich viele Elemente aus M.
3. Zeigen Sie: ist $x \in M$ innerer Punkt von $\bar{M}$, dann ist x innerer Punkt von M.
4. Zeigen Sie: Jede endliche Teilmenge eines metrischen Raumes ist kompakt.

Hausaufgaben: [abgeben am 05.11.07]

1. Man untersuche die folgenden Funktionenfolgen bzw. -reihen auf gleichmäßige Konvergenz auf den angegebenen Intervallen: (4 Punkte)
   (a) $f_n(x) = \dfrac{1}{1+nx}$ auf $[0,1]$,
   (b) $f_n(x) = \dfrac{x}{1+nx^2}$ auf $[0,1]$,
   (c) $\displaystyle\sum_{n=0}^\infty x^n$ auf $(-q,q)$ mit $0<q<1$,
   (d) $\displaystyle\sum_{n=1}^\infty (x^n - x^{n-1})$ auf $[0,1]$.
2. Sei $d : \mathbb{R}\times\mathbb{R} \to \mathbb{R}$ definiert durch $d(x,y) = |\arctan x - \arctan y|$. Zeigen Sie: (6 Punkte)
   (a) d definiert eine Metrik auf $\mathbb{R}$.
   (b) Der metrische Raum $(\mathbb{R}, d)$ ist nicht vollständig.
   (c) Sei $U \subset \mathbb{R}$. Dann ist U genau dann offen in $(\mathbb{R}, d)$, wenn U offen in $(\mathbb{R}, d^1)$ ist.
3. Es sei (X,d) ein metrischer Raum und $Y, Z \subset X$. Zeigen Sie: (3 Punkte)
   $\overline{Y \cup Z} = \bar{Y} \cup \bar{Z}$ und $\overline{Y \cap Z} \subset \bar{Y} \cap \bar{Z}$. Finden Sie ein Beispiel, wo $\overline{Y \cap Z} \neq \bar{Y} \cap \bar{Z}$ gilt.
4. Beweisen Sie: Eine Teilmenge A eines metrischen Raumes (X,d) ist kompakt genau dann, wenn sie als Teilmenge von (A, d_A) kompakt ist. (3 Punkte)