WS 2007/08 Technische Universität Berlin
Prof. Dr. Fredi Tröltzsch Fakultät II
Dr. Daniel Wachsmuth Institut für Mathematik

4. Übungsblatt Analysis II

Abgabe der Hausaufgaben: Wegen des enormen Aufwandes zum Korrigieren der Hausaufgaben werden ab der dritten Hausaufgabe Einzelabgaben nicht mehr gewertet.

Übungsaufgaben: [werden in der Übung am 12.11.07 besprochen]

1. Seien $C^0([a,b])$ und $C^1([a,b])$ der Raum auf dem Intervall $[a,b] \subset \mathbb{R}$ stetigen bzw. einmal stetig differenzierbaren Funktionen. Es bezeichne Df die Ableitung der Funktion f, $Df := f'$. Zeigen Sie:
   (a) Die Ableitung ist eine lineare Abbildung von $C^1([a,b])$ nach $C^0([a,b])$.
   (b) Die Ableitung ist nicht stetig von $(C^1([a,b]), \|\cdot\|_{sup})$ nach $(C^0([a,b]), \|\cdot\|_{sup})$, also wenn man beide Räume mit der Supremumsnorm versieht.
   (c) Verwendet man auf $C^1([a,b])$ die Norm $\|f\|_{C^1} = \|f\|_{sup} + \|f'\|_{sup}$, dann ist die Ableitung stetig [als Abbildung von $(C^1([a,b]), \|\cdot\|_{C^1})$ nach $(C^0([a,b]), \|\cdot\|_{sup})$]. Daraus folgt auch: die Normen $\|f\|_{sup}$ und $\|f\|_{C^1}$ sind nicht äquivalent.
2. Es sei nun $C^1_0([a,b]) = \{f \in C^1([a,b]) : f(a) = 0\}$. Wir definieren die lineare Abbildung I als $(If)(x) = \int_a^x f(s)ds$, If ist also eine Stammfunktion von f. Zeigen Sie:
   (a) I ist stetig von $(C^0([a,b]), \|\cdot\|_{sup})$ nach $(C^1([a,b]), \|\cdot\|_{sup})$ oder nach $(C^1([a,b]), \|\cdot\|_{C^1})$ oder nach $(C^0([a,b]), \|\cdot\|_{sup})$.
   (b) Es gilt $DIf = f$ für alle $f \in C^0([a,b])$ und $IDg = g$ für alle $g \in C^1_0([a,b])$. Damit sind die Abbildungen $D : C^1_0([a,b]) \to C^0([a,b])$ und $I : C^0([a,b]) \to C^1_0([a,b])$ bijektiv.
3. (a) Es sei $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ eine stetige und bijektive Funktion. Dann ist auch f^{-1} stetig.
   (b) Es gibt stetige und bijektive Abbildungen zwischen metrischen Räumen, deren Umkehrung nicht stetig ist.

Tutoriumsaufgaben: [werden in den Tutorien vom 13.11.07 bis 16.11.07 besprochen]

1. Stetigkeit kann mit der beliebten $\epsilon - \delta$-Definition erklärt werden.
2. Sei (X, d) ein zusammenhängender metrischer Raum.
   (a) Sei Y ein metrischer Raum versehen mit der diskreten Metrik. Dann gilt $F : X \to Y$ ist genau dann stetig, wenn f konstant ist.
   (b) Unter welchen Bedingungen ist eine Abbildung $g : Y \to X$ stetig?
3. Berechnen Sie den Grenzwert der Funktion $z = \frac{\sin|xy|}{x^2+y^2}$ im Nullpunkt, wenn sich der Punkt (x, y) auf folgenden Wegen nähert:
   (a) längs der x-Achse,
   (b) längs der y-Achse,
   (c) längs der Geraden $y = mx$.
4. Untersuchen Sie $\lim\limits_{x\to 0}(\lim\limits_{y\to 0} f(x,y))$, $\lim\limits_{y\to 0}(\lim\limits_{x\to 0} f(x,y))$ und $\lim\limits_{(x,y)\to \mathbf{0}} f(x,y)$!

   a) $f(x,y) = \dfrac{x^2y^2}{x^2y^2 + (x-y)^2}$, b) $f(x,y) = (x+y)\sin\dfrac{1}{x}\sin\dfrac{1}{y}$.
5. Berechnen Sie für die folgenden Ausdrücke jeweils den Grenzwert für $(x, y) \to 0$ (falls dieser existiert)!

   a) $\dfrac{x^2+y^2}{\sqrt{1+x^2+y^2}-1}$ b) $\dfrac{\sqrt{1+x^2y^2}-1}{x^2+y^2}$ c) $\dfrac{\sin(x^3+y^3)}{x^2+y^2}$ d) $\dfrac{1-\cos(x^2+y^2)}{(x^2+y^2)x^2y^2}$

Hausaufgaben: [abgeben am 19.11.07]

1. Sei (X, d) ein zusammenhängender metrischer Raum. Sei $f : X \to \mathbb{R}$ eine stetige Abbildung ohne Nullstellen. Für ein $x_0 \in X$ gelte $f(x_0) > 0$. Zeigen Sie, dass dann für alle $x \in X$ gilt $f(x) > 0$. (2 Punkte)

2. Sei $f : X \to Y$ eine stetige Abbildung zwischen den metrischen Räumen (X, d_X) und (Y, d_Y). Für jede kompakte Menge $K \subset X$ existiert eine Konstante $M > 0$, so dass $d_Y(f(x), f(y)) \leq M$ für alle $x, y \in K$ gilt. (2 Punkte)

3. Zeigen Sie: (5 Punkte)

   (a) Sei X ein normierter Vektorraum über $\mathbb{R}$ mit Norm $\|\cdot\|$ und mit der von der Norm induzierten Metrik d, definiert duch $d(x, y) = \|x - y\|$. Dann erfüllt die Metrik für alle $x, y, z \in X$, $\alpha \in \mathbb{R}$,

   $$d(x - z,\, y - z) = d(x, y) \quad \text{und} \quad d(\alpha x, \alpha y) = |\alpha| d(x, y).$$

   (b) Sei (X, d) ein metrischer Vektorraum über $\mathbb{R}$. Die Metrik d erfülle die beiden Eigenschaften aus Teilaufgabe (a). Dann gibt es eine Norm auf X, die d induziert.

   (c) Ist die diskrete Metrik auf $X \neq \{0\}$ von einer Norm induziert?

4. Untersuchen Sie die folgenden Funktionen (als Abbildungen von $\mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ jeweils mit Standardmetrik versehen) auf Stetigkeit! (4 Punkte)

   $$(a) \quad f(x, y) = \begin{cases} 0 & x = 0 \\ \frac{(xy)^2}{x^2 + y^2} & x \neq 0 \end{cases}, \quad (b) \quad f(x, y) = \begin{cases} 0 & x = 0 \\ \frac{x^4 - y^4}{x^4 + y^4} & x \neq 0 \end{cases}$$

5. (Zusatz) Die Binärdarstellung einer natürlichen Zahl n ist gegeben durch $n = \sum_{k=0}^{\infty} b_k 2^k$, $b_k \in \{0, 1\}$. Damit definieren wir eine Funktion $f : \mathbb{N} \to \mathbb{R}$ als $f(n) = \sum_{k=0}^{\infty} b_k 2^{-k}$.

   Zeigen Sie, dass f eine stetige Abbildung von $\mathbb{N}$ (versehen mit der Metrik aus Hausaufgabe 5 vom dritten Übungsblatt) nach $\mathbb{R}$ (versehen mit der Standardmetrik) gilt.

   Hinweis: Zeigen Sie mithilfe der geometrischen Reihe, dass $|f(x) - f(y)| \leq 2d(x, y)$ ist. (3 Zusatzpunkte)