WS 2007/08 | Technische Universität Berlin
Prof. Dr. Fredi Tröltzsch | Fakultät II
Dr. Daniel Wachsmuth | Institut für Mathematik

7. Übungsblatt Analysis II

Übungsaufgaben: [werden in der Übung am 03.12.07 besprochen]

1. In der grossen Übung werden wir die Beispiele Nr. 126, 128, 143, und die Bemerkung nach Korollar 145 besprechen.

Tutoriumsaufgaben: [werden in den Tutorien vom 04.12.07 bis 07.12.07 besprochen]

1. Sei $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ definiert als
$$f(x,y) = \begin{cases} \frac{\sin x}{x} y & x \neq 0, \\ y & x = 0 \end{cases}$$
   (a) Wo ist f stetig/unstetig?
   (b) Bestimmen Sie die partiellen Ableitungen, dort wo diese existieren.
   (c) In welchen Punkten ist f differenzierbar?

2. Sei $H = \{(x_1, x_2, x_3) \in \mathbb{R}^3 : x_1^2 + x_2^2 - x_3^2 = -1,\, x_3 > 0\}$ eine Schale des zweischaligen Hyperboloids. Schreiben Sie H als Graph einer Funktion $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^3$ und geben Sie die Tangentialebenen an H in Parameterform an.

3. Berechnen Sie die Hesse-Matrizen der folgenden Funktionen.
   (a) $f : (\mathbb{R} \setminus \{0\})^3 \to \mathbb{R}$, $f(x,y,z) = \frac{y}{x} + \frac{z}{y} - \frac{x}{z}$,
   (b) $f : (\mathbb{R}^+)^3 \to \mathbb{R}$, $f(x,y,z) = \frac{x\sqrt{z}}{y}$,
   (c) $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$, $f(x) = \langle x, Ax + b\rangle$, $A \in \mathbb{R}^{n,n}$, $b \in \mathbb{R}^n$.

   Die Hesse-Matrix (oder hessesche Matrix, engl. Hessian) ist die darstellende Matrix der zweiten Ableitung einer Funktion $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$.

Hausaufgaben: [abgeben am 10.12.07]

1. Sei Sei $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ definiert als (6 Punkte)
$$f(x,y) = \begin{cases} \frac{x^2 y}{x^4 + y^2} & (x,y) \neq 0, \\ 0 & (x,y) = 0 \end{cases}$$
   Zeigen Sie:
   (a) Die Funktion f ist nicht stetig im Nullpunkt, jedoch ist die Einschränkung auf jede Gerade durch den Nullpunkt stetig.
   (b) An jeder Stelle existieren alle Richtungsableitungen.
   (c) Mindestens eine der partiellen Ableitungen ist im Nullpunkt nicht stetig. (Hinweis: Ist f im Nullpunkt differenzierbar?)

2. Seien $A, B \in \mathbb{R}^{n,n}$ und $b, c, d \in \mathbb{R}^n$. Bestimmen Sie die Jacobi-Matrizen der folgenden Abbildungen (4 Punkte)
   (a) $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$, $f(x) = A(x+b) + \langle c, x\rangle d$,
   (b) $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$, $f(x) = \langle x, Bx\rangle^2 + \langle b - Ax, b\rangle$,
   (c) $f : \mathbb{R}^n \setminus \{0\} \to \mathbb{R}$, $f(x) = \frac{\langle x, Ax\rangle}{\langle x, x\rangle}$.

3. Gegeben ist die Abbildung $f : \mathbb{R}^{n,n} \to \mathbb{R}^{n,n}$, $f(A) = A^T DA$ mit $D \in \mathbb{R}^{n,n}$. Ist f ein- oder zweimal differenzierbar? Bestimmen Sie die erste und zweite Ableitung von f. (3 Punkte)