WS 2007/08
Prof. Dr. Fredi Tröltzsch
Dr. Daniel Wachsmuth

Technische Universität Berlin
Fakultät II
Institut für Mathematik

10. Übungsblatt Analysis II

Übungsaufgaben: [werden in der Übung am 07.01.08 besprochen]

1. Wir werden in der ersten Übung im neuen Jahr mannigfaltige Mannigfaltigkeiten untersuchen.

Tutoriumsaufgaben: [werden in den Tutorien vom 08.01.08 bis 11.01.08 besprochen]

1. Berechnen Sie $y'(x)$, wenn $y(x)$ implizit durch die Gleichung $F(x,y) = 0$ definiert wird. Für welche $x \in \mathbb{R}$ ist $y(x)$ bzw. $y'(x)$ definiert?

   (a) $F(x,y) = x^2 + y^2 - 4x + 6y$

   (b) $F(x,y) = x^{\frac{2}{3}} + y^{\frac{2}{3}} - a^{\frac{2}{3}}$, $a > 0$

   (c) $F(x,y) = xe^{2y} - ye^{2x}$

   (d) $F(x,y) = \dfrac{1}{1 + x^2 + y^2} - 1$

2. Gegeben ist die Gleichung $\sqrt{y - 2x - 1} - x = 0$. Bestimmen Sie für $x_0 = 1$ die Werte von $y(x_0), y'(x_0), y''(x_0)$. Berechnen Sie damit das Taylorpolynom 2. Grades von y in x_0.

Hausaufgaben: [abgeben am 14.01.08]

1. Berechnen Sie $y'(x)$, wenn $y(x)$ implizit durch die Gleichung $F(x,y) = 0$ definiert wird. Für welche $x \in \mathbb{R}$ ist $y(x)$ bzw. $y'(x)$ definiert? (6 Punkte)

   (a) $F(x,y) = y^3 + x^2 + 1$

   (b) $F(x,y) = x^2 + y^2 + e^x + e^y$

   (c) $F(x,y) = xy$

2. Gegeben ist die Gleichung $x^2 - y^2 = 0$. Berechnen Sie die Menge aller Punkte (x,y), die die Gleichung erfüllen. Im Punkt $(0,0)$ macht der Satz über implizite Funktionen keine Aussage. Warum? Woran könnte das liegen? (4 Punkte)

3. Gegeben ist die Menge $M = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : \, x^2 + y^2 - z^2 = 0, \, x + y = 1\}$. Zeigen Sie, dass M eine eindimensionale C^∞-Untermannigfaltigkeit des $\mathbb{R}^3$ ist. Geben Sie für die Punkte $p_1 = (\frac{1}{2}, \frac{1}{2}, \frac{\sqrt{2}}{2})$ und $p_2 = (\frac{1}{2}, \frac{1}{2}, -\frac{\sqrt{2}}{2})$ je eine lokale Parametrisierung von M an. Als V_0 kann jeweils die x-Achse gewählt werden. Untersuchen Sie weiterhin, ob M zusammenhängend ist (im $\mathbb{R}^3$ versehen mit der Standardmetrik). (6 Punkte)