WS 2007/08
Prof. Dr. Fredi Tröltzsch
Dr. Daniel Wachsmuth

Technische Universität Berlin
Fakultät II
Institut für Mathematik

12. Übungsblatt Analysis II

Übungsaufgaben: [werden in der Übung am 21.01.08 besprochen]

1. Es seien a und b stetige Funktionen von $\mathbb{R}$ nach $\mathbb{R}$. Dann ist die Lösung der Differentialgleichung
$$y'(t) = a(t)y(t) + b(t), \quad y(0) = y_0$$
gegeben durch
$$y(t) = e^{A(t)}y_0 + \int_0^t e^{A(t-s)}b(s)ds$$
mit
$$A(t) = \int_0^t a(s)ds.$$

2. Diese Erkenntnis wenden wir auf ein Beispiel aus der Land- und Forstwirtschaft an.

Tutoriumsaufgaben: [werden in den Tutorien vom 22.01.08 bis 25.01.08 besprochen]

1. Skizzieren Sie das Richtungsfeld der Differentialgleichung
$$x' = \frac{x}{t},\ t \neq 0$$
bestimmen Sie alle Lösungen und skizzieren Sie einige im Richtungsfeld.

2. Bestimmen Sie die allgemeinen Lösungen der angegebenen Differentialgleichungen:
   (a) $y' = -y + xe^{-x} + 1$,
   (b) $y' = y\tan x - 2\sin x$, $-\frac{\pi}{2} < x < \frac{\pi}{2}$,
   (c) $xy' = 4y + x^5$, $x > 0$.

Hausaufgaben: [abgeben am 28.01.08]

1. Berechnen Sie die Lösungen der folgenden Anfangswertprobleme: (9 Punkte)
   (a) $y' = 2xy + x$, $y(0) = 1$,
   (b) $y' = \dfrac{x - 4xy}{1 + x^2}$, $y(1) = 1$
   (c) $y' = \dfrac{2}{x}y + 2x^3$, $y(2) = 20$.

2. Zur Zeit $t_0 = 0$ wird in der Stadt B eine Umweltmarke für Autos und andere Straßenverkehrsteilnehmer eingeführt. Allerdings kommen dieser Pflicht nicht alle Bürger nach. Es sei $b(t)$ für $t \geq 0$ der Bruchteil derer, die sich eine solche Marke besorgt haben. Aus den Berichten offizieller Stellen ist zu entnehmen, dass die Anzahl der Markenbesitzer mit einer Geschwindigkeit wächst, die proportional zur Anzahl der noch vorhandenen Markenverweigerer ist.

   Formulieren Sie das entsprechende Anfangswertproblem für $b(t)$ und lösen Sie es. Wann wird auch der letzte renitente Autofahrer eine solche Marke besitzen? (4 Punkte)