WS 2007/08 Technische Universität Berlin
Prof. Dr. Fredi Tröltzsch Fakultät II
Dr. Daniel Wachsmuth Institut für Mathematik

13. Übungsblatt Analysis II

Übungsaufgaben: [werden in der Übung am 28.01.08 besprochen]

1. Es sei $P(t)$ die Größe der Population einer gewissen Spezies. Wir werden die Gleichungen für exponentielles Wachstum
$$P'(t) = \alpha P(t)$$
und logistisches Wachstum
$$P'(t) = \lambda P(t)(K - P(t))$$
herleiten und lösen.

2. Die logistische Differentialgleichung ist ein Spezialfall der Bernoullischen Differentialgleichung
$$y'(x) = \alpha(x)y(x) + \beta(x)y(x)^\rho.$$
Diese werden wir lösen.

Tutoriumsaufgaben: [werden in den Tutorien vom 29.01.08 bis 01.02.08 besprochen]

1. Wir leiten die Differentialgleichungen für den freien und den gedämpften Fall eines Körpers im Schwerefeld der Erde her.

2. Lösen Sie die folgenden Differentialgleichungen mit der Methode der Trennung der Veränderlichen:
   (a) $y' = \dfrac{x^2}{y^2}$,
   (b) $y' = \cos x(1 + y^2)$, $y(0) = 0$,
   (c) $y' = \dfrac{e^x - e^{-x}}{e^x + e^{-x}}$.

Hausaufgaben: [abgeben am 04.02.08]

1. Die Gleichung für den freien Fall wurde von Gaililei unter der Voraussetzung hergeleitet, dass die Geschwindigkeit eines aus der Ruhelage fallenden Körpers proportional zur Fallzeit ist. Welche Gleichung erhält man, wenn man annimmt, dass die Geschwindigkeit proportional zum Fallweg ist? Zeigen Sie, dass für die Anfangsbedingung $x(0) = 0$ eine absurde Konsequenz herauskommt. (3 Punkte)

2. Für die folgenden Eulerschen Differentialgleichungen sind die allgemeinen Lösungen auf dem Intervall $(0, +\infty)$ anzugeben. (6 Punkte)
   (a) $x^2y'' - xy' + y = 0$,
   (b) $y'' + \dfrac{2}{x}y' = 0$,
   (c) $xy''' + 2y'' - \frac{1}{x}y' + \frac{1}{x^2}y = 0$.

3. Lösen Sie das Bernoullische Anfangswertproblem $(\gamma, \tau > 0)$
$$P'(t) = \gamma P(t) - \tau P(t)^3, \quad P(0) = P_0 > 0.$$
Wie verhält sich die Lösung für $t \to +\infty$? (4 Punkte)