TU Berlin WS 2007/08
Mathematatik III für Physiker Wüst/Jansen/Möws/Witte

1. Übungsblatt

(Abgabe: bis Mi. 31. Oktober, 12:15 Uhr, Briefkasten MA 728)

---

1. Aufgabe (5 Punkte)

1. Sei $f \in C^1([0,1])$. Wir interessieren uns für das "oszillierende Integral" $\int_0^1 f(t)\cos(\omega t)\mathrm{d}t$ für große Kreisfrequenzen $\omega \in \mathbb{R}$. Zeige:

$$\int_0^1 f(t)\cos(\omega t)\mathrm{d}t = O(1/\omega) \quad (\omega \to \infty).$$

2. Bestimme die Stammfunktionen der auf $(-\sqrt{\pi/2}, \sqrt{\pi/2})$ definierten Funktion $t \mapsto t\tan(t^2)$.

2. Aufgabe (2 Punkte)

Sei $f \in C^0(\mathbb{R})$. Sei $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ definiert durch

$$g(x) := \int_x^{x^2} f(t)\mathrm{d}t.$$

Bestimme die Ableitung von g.

3. Aufgabe (5 Punkte)

Sei $p > 0$. Zeige, dass

$$\sum_{k=1}^n k^p \sim \frac{n^{p+1}}{p+1} \quad (n \to \infty).$$

(Hinweis: es darf verwendet werden, dass für $f \in C^0([0,1])$ die Riemannsumme $\sum_{k=1}^n \frac{1}{n} f(\frac{k}{n})$ für $n \to \infty$ gegen $\int_0^1 f$ konvergiert!)

4. Aufgabe (4 Punkte)

Untersuche die folgenden uneigentlichen Integrale auf ihre Existenz:

a) $\int_0^\infty \frac{x\sin x}{1+x^3}\mathrm{d}x$

b) $\int_0^1 \frac{1}{\sqrt[4]{x(1-x)^3}}\mathrm{d}x$

c) $\int_0^\infty \frac{x^\alpha}{1+x^\beta}\mathrm{d}x$, $\alpha, \beta > 0$.

d) $\int_0^{\pi/2} \ln\sin x\mathrm{d}x$.

5. Aufgabe (4 Punkte)

Sei $f : \mathbb{R}_+ \to \mathbb{R}_+$ gleichmäßig stetig. Zeige:

$$\int_0^\infty f \text{ existiert } \Rightarrow \lim_{x\to\infty} f(x) = 0.$$