TU Berlin
Mathematik III für Physiker

WS 2007/08
Wüst/Jansen/Möws/Witte

10. Übungsblatt

(Abgabe: bis Mi. 16. Januar, 12:15 Uhr, Briefkasten MA 728)

---

1. Aufgabe (9 Punkte)

a) Zeige, dass die Äquivalenz von Wegen im $\mathbb{R}^m$ eine Äquivalenzrelation ist, d.h. dass diese Relation reflexiv, symmetrisch und transitiv ist.

b) Zeige: sind f und g zwei äquivalente Wege, dann ist f doppelpunktfrei genau dann, wenn g doppelpunktfrei ist.

c) Zeige, dass die beiden Wege f und g im $\mathbb{R}^2$, gegeben durch

$$f(t) := \langle \cos t, \sin t \rangle, \quad (t \in [0, \tfrac{\pi}{2}]),$$
$$g(\tau) := \langle \frac{1-\tau^2}{1+\tau^2}, \frac{2\tau}{1+\tau^2} \rangle, \quad (\tau \in [0,1])$$

äquivalent sind.

2. Aufgabe (6 Punkte)

Sei $t_0 > 0$ und $x(t) := \begin{pmatrix} t^2 \\ t^3 \end{pmatrix}$ für $t \in [0, t_0]$.

a) Berechne die Länge der zugehörigen Kurve K_{t_0}.

b) Finde die Darstellung von K_1 mit der Bogenlänge als Parameter.

3. Aufgabe (5 Punkte)

Sei $g \in C^0(\mathbb{R}^2, \mathbb{R}^2)$ definiert durch $g(x,y) := \langle x^2, xy \rangle$. Berechne jeweils das Kurvenintegral des Feldes g längs der Kurven K_1 und K_2, gegeben durch

1. K_1: $f_1(t) := \langle t, t \rangle \quad (t \in [0,1])$.
2. K_2: $f_2(t) := \begin{cases} \langle t, 0 \rangle, & \text{für } t \leq 1, \\ \langle 1, t-1 \rangle, & \text{für } t > 1. \end{cases} \quad (t \in [0,2])$.

Skizziere die Spuren der Kurven K_1 und K_2. Ist das Feld g konservativ?