TU Berlin
Mathematik III für Physiker

WS 2007/08
Wüst/Jansen/Möws/Witte

# 11. Übungsblatt

(Abgabe: bis Mi. 23. Januar, 12:15 Uhr, Briefkasten MA 728)

---

**1. Aufgabe** (2 Punkte)

Finde ein $m \in \mathbb{N}$ und eine Funktion $f$ aus $\mathbb{R}^m$ nach $\mathbb{R}$, die die folgenden Eigenschaften erfüllt:

1. $G := \mathcal{D}(f) \subset \mathbb{R}^m$ ist offen.
2. $f$ ist in $\mathcal{D}(f)$ differenzierbar, und $\nabla f(x) = 0 \quad (x \in G)$.
3. $f$ ist nicht konstant.

**2. Aufgabe** (2 Punkte)

Seien $G \subset \mathbb{R}^3$ offen, $\Phi \in C^1(G)$ und $f \in C^1(G; \mathbb{R}^3)$. Zeige, dass

$$\mathrm{rot}(\Phi g) = \Phi \,\mathrm{rot} g + (\nabla \Phi) \times g.$$

**3. Aufgabe** (4 Punkte)

Seien $f, g : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ definiert durch

$$f(x) = \begin{pmatrix} 2x_1x_2 \\ x_1^2 \end{pmatrix}, \quad g(x) = \begin{pmatrix} 2x_1x_2 \\ -x_1^2 \end{pmatrix}.$$

Untersuche die beiden Felder auf Konservativität und bestimme gegebenenfalls ein Potential.

**4. Aufgabe** (5 Punkte)

Sei $G := \mathbb{R}^2 \backslash \{0\}$ und $b : G \to \mathbb{R}^2$ gegeben durch

$$b(x, y) := \frac{1}{x^2 + y^2} \begin{pmatrix} -y \\ x \end{pmatrix}.$$

Das Feld $g$ ist in $G$ zwar wirbelfrei, aber nicht konservativ (siehe Vorlesung bzw. Wüsts Buch). Hier soll nun das Feld auf einem kleineren Bereich untersucht werden.

a) Sei $G_0 := \mathbb{R}^2 \backslash \{\langle x, 0 \rangle \mid x \leq 0\}$. Zeige, dass $b$ in $G_0$ konservativ ist.

b) Bestimme sämtliche Potentiale von $g$ in $G_0$. Überprüfe, dass keines der Potentiale zu einem Potential auf ganz $G$ fortgesetzt werden kann.

**5. Aufgabe** (7 Punkte)

a) Sei $A \in M^{\mathbb{R}}_{n\times n}$ und $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$, $f(x) := Ax$. In einer früheren Aufgabe wurde für den Fall, dass $A$ symmetrisch ist, gezeigt, dass $f(x) = \nabla V(x)$ mit $V(x) = (x, Ax)/2$. Anders formuliert: wenn $A$ symmetrisch ist, dann ist die zugehörige lineare Abbildung ein Potentialfeld. Zeige, dass auch die Umkehrung gilt, d.h.: wenn $f$ ein Potentialfeld ist, so muss $A$ symmetrisch sein.

b) Sei $A \in M^{\mathbb{R}}_{3\times 3}$ und $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$, $f(x) := Ax$. Zeige: es gibt eine Abbildung $V \in C^1(\mathbb{R}^3)$ und einen Vektor $g \in \mathbb{R}^3$, so dass

$$f(x) = \nabla V(x) + g \times x \quad (x \in \mathbb{R}^3). \tag{*}$$

Wie hängt $g$ mit der Rotation von $f$ zusammen?

c) Sei

$$A := \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}, \quad f(x) := Ax \ (x \in \mathbb{R}^3).$$

Bestimme ein $V \in C^1(\mathbb{R}^3)$ und einen Vektor $g \in \mathbb{R}^3$, so dass die Gleichung (*) gilt.