12. Übungsblatt

(Abgabe: bis Mi. 30. Januar, 12:15 Uhr, Briefkasten MA 728)

---

1. Aufgabe (4 Punkte)

Für $f \in C^0(\mathbb{R}^2)$ sei

$$J(f) := \int_0^1 \left(\int_{-x}^{x^2} f(x,y) \mathrm{d}y \right) \mathrm{d}x.$$

a) Bestimme einen Jordan-Bereich $M \subset \mathbb{R}^2$, so dass $J(f) = \int_M f(x,y) \mathrm{d}\langle x,y\rangle$ für alle $f \in C^0(\mathbb{R}^2)$. Skizziere M!

b) Bestimme $a(y)$, $b(y)$ so, dass gilt:

$$J(f) = \int_{-1}^1 \left(\int_{a(y)}^{b(y)} f(x,y) \mathrm{d}x \right) \mathrm{d}y \quad (f \in C^0(\mathbb{R}^2)).$$

2. Aufgabe (4 Punkte)

a) Seien $a, b > 0$. Bestimme den Flächeninhalt der Ellipse

$$M_1 := \{\langle x,y\rangle \in \mathbb{R}^2 \mid \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} \leq 1\}.$$

b) Wie groß ist das Volumen des Körpers, der von oben durch das Paraboloid $z = x^2 + y^2$ und von unten durch das Quadrat $[0,1] \times [0,1]$ begrenzt wird?

3. Aufgabe (6 Punkte)

Welche der folgenden Mengen $M_1 \subset \mathbb{R}$, $M_2, M_3, M_4 \subset \mathbb{R}^2$ sind Jordan-Nullmengen? Beweise jeweils Deine Antwort!

$$M_1 := \{p \in \mathbb{N} \mid p \text{ Primzahl}\}, \qquad M_2 := \{\langle x, \frac{1}{x}\rangle \mid x \in (0,1)\}$$
$$M_3 := \{\langle \frac{1}{n}\cos n, \frac{1}{n}\sin n\rangle \mid n \in \mathbb{N}\}, \quad M_4 := \{\langle x, \frac{1}{x}\rangle \mid x \in (1,2)\}.$$

4. Aufgabe (6 Punkte)

Sei $Q := [0,1] \times [0,1]$. Sei $f : Q \to \mathbb{R}$ definiert durch

$$f(x,y) := \chi_{\{1/2\}}(x)\chi_{\mathbb{Q}}(y) = \begin{cases} 1, & x = \frac{1}{2} \text{ und } y \in \mathbb{Q}, \\ 0, & \text{sonst.} \end{cases}$$

a) Sei $N \subset [0,1] \times [0,1]$ die Menge der Stellen, an denen f nicht stetig ist. Bestimme N.

b) Zeige mit Hilfe von a), dass f Riemann-integrierbar ist, und bestimme $\int_Q f$.

c) Definiere für $x \in [0,1]$

$$h(x) := \underline{\int}_Q f(x,y)\mathrm{d}y, \quad H(x) := \overline{\int}_Q f(x,y)\mathrm{d}y.$$

Berechne $h(x)$ und $H(x)$. Für welche x sind $h(x)$ und $H(x)$ voneinander verschieden?

d) Überprüfe, dass

$$\int_0^1 h(x)\,\mathrm{d}x = \int_0^1 H(x)\,\mathrm{d}x = \int_Q f.$$