TU Berlin WS 2007/08
Mathematik III für Physiker Wüst/Jansen/Möws/Witte

13. Übungsblatt

(Abgabe: bis Mi. 6. Februar, 12:15 Uhr, Briefkasten MA 728)

---

1. Aufgabe (4 Punkte)

Gib Ausschöpfungen für die folgenden Mengen an:

$$M_1 := (-2,2), \quad M_2 := \{\langle x,y,z\rangle \in \mathbb{R}^3 \mid x^2+2y^2+3z^2<1\},$$
$$M_3 := M_2\backslash\{0\}, \quad M_4 := (0,2)\times(-\infty,0).$$

2. Aufgabe (6 Punkte)

Sei $f(x) := 1/x \quad (x \in \mathbb{R}\backslash\{0\})$. Wir wollen das Integral von f über $G := (-1,1)\backslash\{0\}$ untersuchen.

a) Sei zunächst
$$G_n := [-1+\tfrac{1}{n}, -\tfrac{1}{n}] \cup [\tfrac{1}{n}, 1-\tfrac{1}{n}] \quad (n \in \mathbb{N}\backslash\{1\}).$$
Zeige, dass $\int_{G_n} f$ konvergiert und bestimme den Grenzwert.

b) Wir betrachten nun eine andere Ausschöpfung. Sei
$$K_n := [-1+\tfrac{1}{n}, -\tfrac{2}{n}] \cup [\tfrac{1}{n}, 1-\tfrac{1}{n}] \quad (n \in \mathbb{N}, n \geq 3).$$
Zeige, dass auch $\int_{K_n} f$ konvergiert und vergleiche den Grenzwert mit dem aus a).

c) Existiert das uneigentliche Integral $\int_G f$?

3. Aufgabe (4 Punkte)

Sei $G \subset \mathbb{R}^m$ offen und $f \in R_{\mathrm{loc}}(G)$. Zeige: wenn der Abschluss $M = \bar{G}$ von G ein Jordan-Bereich ist und f sich zu einer Funktion $\bar{f} \in R(\bar{G})$ fortsetzen lässt, dann existiert das Integral $\int_G f$ und ist gleich dem eigentlichen Integral $\int_M \bar{f}$.

4. Aufgabe (6 Punkte)

Es seien die folgenden Integrale gegeben:

$$I_1 = \int_{(0,1)\times(0,1)} \frac{1}{x_1x_2}\mathrm{d}x \qquad I_2 = \int_{(1,2)\times(1,2)} \frac{1}{x_1x_2}\mathrm{d}x$$
$$I_3 = \int_{G_3} \arctan\frac{1}{x_1-x_2}\mathrm{d}x, \qquad \text{mit } G_3 = \{x \in (0,1)\times(0,1) \mid x_1 \neq x_2\}$$
$$I_4 = \int_{(1,2)\times(2,3)} \arctan\frac{1}{x_1-x_2}\mathrm{d}x. \qquad I_5 = \int_{(0,\infty)\times(1,5)} \frac{1}{1+x_1^2}\mathrm{d}x,$$
$$I_6 = \int_{(1,5)\times(0,\infty)} \frac{1}{1+x_1^2}\mathrm{d}x.$$

Beantworte für jedes Integral die folgenden zwei Fragen:

(i) Lässt sich das Integral im Sinne von Aufgabe 3 auf ein eigentliches Integral zurückführen?

(ii) Existiert das Integral? (Hierbei darf die Aussage aus Aufgabe 3 verwendet werden!)