TU Berlin
Mathematik III für Physiker

WS 2007/08
Wüst/Jansen/Möws/Witte

# Übungsaufgaben

Thema: Transformationsformel, uneigentliche Integration

---

**1. Aufgabe**

Sei $M := \{\langle r, \varphi \rangle \mid r \in [1,2], \varphi \in [0, 4\pi]\}$, und $g : M \to \mathbb{R}^2$ definiert durch $g(r,\varphi) := \langle r\cos\varphi, r\sin\varphi\rangle$.

a) Überprüfe, dass $g \in C^1(M)$ und $\det \mathrm{D}g(r,\varphi) \neq 0 \quad (\langle r,\varphi\rangle \in M)$.

b) Skizziere $g(M)$. Zeige, dass

$$2\int_{g(M)} 1 \mathrm{d}\langle x.y\rangle = \int_{[1,2]\times[0,4\pi]} 1 \cdot |\det \mathrm{D}g(r,\varphi)| \mathrm{d}\langle r,\varphi\rangle.$$

c) Die Transformationsformel gilt hier also offensichtlich nicht – welche Voraussetzung wird von $g$ nicht erfüllt? wie kann man sich den Faktor 2 in b) anschaulich erklären?

**2. Aufgabe**

Sei $M \subset \mathbb{R}^n$ eine Jordan-Menge. Für $R > 0$ definieren wir die „dilatierte" Menge $M_R$

$$M_R := \{Rx \mid x \in M\}.$$

Zeige, dass $M_R$ ebenfalls eine Jordan-Menge ist, und zwar mit Volumen $|M_R| := R^n|M|$.

**3. Aufgabe**

Sei $\kappa_m$ das Volumen der $m$-dimensionalen Einheitskugel. Zeige, dass

$$\kappa_m = \frac{2\pi}{m}\kappa_{m-2} \quad (m \in \mathbb{N},\ m \geq 3).$$

Folgere, dass $\lim_{m\to\infty} \kappa_m = 0$. (Vgl. Wüst Aufgabe 19.16, dort gibt es auch ein paar Tipps.)

**4. Aufgabe**

Es seien die beiden folgenden uneigentlichen Integrale gegeben:

$$\int_{\mathbb{R}} \frac{1}{1+x^2}\mathrm{d}x, \quad \int_{\mathbb{R}^2} \frac{1}{1+x_1^2+x_2^2}\mathrm{d}x.$$

Zeige, dass das erste Integral existiert, das zweite jedoch nicht.