TU Berlin WS 2007/08
Mathematik III für Physiker Wüst/Jansen/Möws/Witte

2. Übungsblatt

(Abgabe: bis Mi. 7. November, 12:15 Uhr, Briefkasten MA 728)

---

1. Aufgabe (5 Punkte)

Sei $f_n(x) := \exp(-x^2/n) \quad (n \in \mathbb{N},\ x \in \mathbb{R})$.

a) Zeige, dass $\{f_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ auf $\mathbb{R}$ punktweise, aber nicht gleichmäßig konvergiert.

b) Zeige, dass $\{f_n'\}_{n\in\mathbb{N}}$ auf $\mathbb{R}$ gleichmäßig konvergiert.

c) In der Vorlesung wurde gezeigt, dass unter gewissen Voraussetzungen eine punktweise konvergente Funktionenfolge bei gleichmäßiger Konvergenz der Ableitungen selbst wieder gleichmäßig konvergiert. Warum besteht kein Widerspruch zu a) und b)?

2. Aufgabe (5 Punkte)

Für $\beta, \mu > 0$

$$f_{\beta,\mu}(\varepsilon) := \frac{1}{\exp\big(\beta(\varepsilon - \mu)\big) + 1} \quad (\varepsilon > 0).$$

Sei $g \in C^0\big((0,\infty)\big)$ eine über $(0,\infty)$ absolut integrierbare Funktion. Zeige:

a) Für alle $\beta, \mu > 0$ ist die Funktion $(0,\infty) \ni \varepsilon \mapsto g(\varepsilon) f_{\beta,\mu}(\varepsilon)$ ebenfalls über $(0,\infty)$ (uneigentlich) integrierbar. Wo fließt die *absolute* Integrierbarkeit von g ein?

b) Es gilt für alle $\mu > 0$

$$\lim_{\beta\to\infty} \int_0^\infty g(\varepsilon) f_{\beta,\mu}(\varepsilon) \mathrm{d}\varepsilon = \int_0^\mu g(\varepsilon) \mathrm{d}\varepsilon.$$

Bemerkung: Integrale von diesem Typ treten oft in der statistischen Physik auf. Dort ist μ das chemische Potential und β ist proportional zum Inversen der absoluten Temperatur T. Der Grenzübergang $\beta \to \infty$ entspricht dem Temperatur-Null-Limes $T \to 0$.

3. Aufgabe (5 Punkte)

Sei $\{p_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ eine Folge nichtnegativer Zahlen mit $\sum_{n=1}^\infty p_n = 1$. Sei

$$E := \begin{cases} \sum_{n=1}^\infty n p_n & \text{falls } \sum_n n p_n \text{ konvergiert,} \\ \infty & \text{sonst.} \end{cases}$$

a) Sei $\mathcal{D} \subset \mathbb{R}$ die Menge derjenigen $t \in \mathbb{R}$, für die die Potenzreihe $\sum_n p_n t^n$ konvergiert. Was weiß man über $\mathcal{D}$?

b) Sei $F(t) := \sum_{n=1}^\infty p_n t^n \quad (t \in \mathcal{D})$. Angenommen, E ist endlich. Zeige, dass dann F bei 1 differenzierbar ist und drücke E mit Hilfe von F aus.

c) Sei $q \in (0,1)$ und $p_n := q^{1-n}(1-q)$ $(n \in \mathbb{N})$. Berechne E.

Bemerkung: Mit Hilfe der Folge $\{p_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ kann man eine Wahrscheinlichkeitsverteilung auf $\mathbb{N}$ definieren. E ist der Erwartungswert der Verteilung. F wird *erzeugende Funktion* genannt. Oft ist es praktischer, mit der erzeugenden Funktion anstatt direkt mit den Einzelwahrscheinlichkeiten $\{p_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ zu rechnen.

4. Aufgabe (5 Punkte)

a) Sei $\{f_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ eine Folge von Funktionen mit gemeinsamem Definitionsbereich $\mathcal{D} \subset \mathbb{R}$. Angenommen, es gibt eine Folge $\{b_n\}_{n\in\mathbb{N}}$, so dass

(i) $|f_{n+1}(x) - f_n(x)| \le b_n \quad (n \in \mathbb{N}, x \in \mathcal{D})$,

(ii) $\sum_n b_n$ konvergiert.

Zeige, dass dann $\{f_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ auf $\mathcal{D}$ gleichmäßig konvergiert.

b) Für $n \in \mathbb{N}$ und $x \in [0,\infty)$ sei

$$f_n(x) := \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k+x} - \ln(n+x).$$

Zeige, dass $\{f_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ auf $[0,\infty)$ gleichmäßig konvergiert.

Hinweis: statt $f_{n+1} - f_n$ kann man auch $f_n - f_{n-1}$ betrachten. Es darf verwendet werden, dass für ein geeignetes $C > 0$

$$|\ln(1+u) - u| \le Cu^2 \quad (u \in (-\frac{1}{2}, \infty)).$$