3. Übungsblatt

(Abgabe: bis Mi. 14. November, 12:15 Uhr, Briefkasten MA 728)

---

1. Aufgabe (4 Punkte)

Die *Spur* einer Matrix $A = (a_{ij})_{1 \le i,j \le n}$ ist die Summe ihrer Diagonalelemente, $\mathrm{Spur}(A) = \sum_{j=1}^n a_{jj}$.

a) Sei $A \in M^{\mathbb{C}}_{n\times n}$ und p das charakteristische Polynom von A. Zeige, dass $p(0) = \det A$.

b) Sei $A \in M^{\mathbb{C}}_{2\times 2}$ und p das charakteristische Polynom von A. Zeige, dass

$$p(\lambda) = \lambda^2 - (\mathrm{Spur} A)\lambda + \det A.$$

c) Sei

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}.$$

Bestimme die Eigenwerte und Eigenräume von A, aufgefasst als lineare Abbildung in $\mathbb{R}^2$. Zeige, dass die Eigenräume senkrecht aufeinander stehen. Vergleiche die Summe und das Produkt der Eigenwerte mit der Determinante und der Spur von A.

2. Aufgabe (2 Punkte)

Eine Matrix $A \in M^{\mathbb{C}}_{n\times n}$ heißt *antihermitesch* wenn $A^* = -A$. Zeige, dass eine antihermitesche Matrix nur rein imaginäre Eigenwerte haben kann, d.h. jeder Eigenwert λ hat verschwindenden Realteil, $\mathrm{Re}\,\lambda = 0$.

3. Aufgabe (3 Punkte)

Eine Matrix $A \in M^{\mathbb{C}}_{k\times k}$ heißt *nilpotent*, wenn es ein $n \in \mathbb{N}$ gibt, so dass $A^n = 0$ ist. Finde ein Beispiel für eine nilpotente Matrix $A \neq 0$. Zeige allgemein, dass nilpotente Matrizen nur den Eigenwert $\lambda = 0$ haben können.

4. Aufgabe (5 Punkte)

Sei V ein euklidischer bzw. unitärer Raum mit $n := \dim V$ und sei $P \in L(V,V)$ ein (orthogonaler) Projektor. Beweise folgende Aussagen:

a) Nur 0 und 1 sind mögliche Eigenwerte von P.

b) Ist $\lambda = 0$ der einzige Eigenwert, so ist $P = 0$.

c) Ist $\lambda = 1$ der einzige Eigenwert, so ist $P = I$.

d) V ist die orthogonale Summe von $\mathcal{N}(P)$ und $\mathcal{W}(P)$: $V = \mathcal{N}(P) \overset{\perp}{\oplus} \mathcal{W}(P)$.

5. Aufgabe (6 Punkte)

a) Seien $\langle V, (\cdot,\cdot)\rangle$ ein unitärer oder ein euklidischer Raum, U ein Teilraum von V, $\dim U =: k$, und $\{b_1, ..., b_k\}$ eine Orthonormalbasis in U. Zeige: durch

$$P : V \to V, \quad x \mapsto Px := \sum_{j=1}^{k} (x, b_j) b_j$$

ist ein Projektor definiert, und zwar der mit $\mathcal{W}(P) = U$, $\mathcal{N}(P) = U^{\perp}$.

b) *Anwendung:* Es sei $V = \mathbb{R}^3$ und $(\cdot,\cdot)$ das Standardskalaprodukt auf $\mathbb{R}^3$. Seien

$$v_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad v_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix},$$

$U := \operatorname{span}\{v_1, v_2\}$ und P der Projektor mit $\mathcal{W}(P) = U$. Bestimme die Matrixdarstellung von P bezüglich der Standardbasis des $\mathbb{R}^3$.