4. Übungsblatt

(Abgabe: bis Mi. 21. November, 12:15 Uhr, Briefkasten MA 728)

---

1. Aufgabe (4 Punkte)

Sei $B \in M^{\mathbb{R}}_{3\times 3}$ gegeben durch

$$B = \begin{pmatrix} -1 & 2 & 2 \\ 2 & -1 & 2 \\ 2 & 2 & -1 \end{pmatrix}.$$

Finde eine unitäre Matrix S, die B diagonalisiert.

2. Aufgabe (5 Punkte)

Die Spur einer quadratischen Matrix ist die Summe ihrer Diagonalelemente.

a) Seien $A, B \in M^{\mathbb{C}}_{n\times n}$. Zeige, dass $\mathrm{Spur}(AB) = \mathrm{Spur}(BA)$. Folgere daraus, dass für jede invertierbare Matrix $S \in M^{\mathbb{C}}_{n\times n}$ die Gleichheit $\mathrm{Spur}(S^{-1}AS) = \mathrm{Spur}A$ gilt.

b) Sei $A \in M^{\mathbb{C}}_{n\times n}$ diagonalisierbar, d.h. es existiere $S \in M^{\mathbb{C}}_{n\times n}$ so, dass S invertierbar und $S^{-1}AS$ diagonal ist. Seien $\lambda_1, ..., \lambda_r$ die paarweise verschiedenen Eigenwerte von A und $n_1, ..., n_r$ ihre algebraischen Vielfachheiten. Zeige, dass

$$\sum_{j=1}^{r} n_j \lambda_j = \mathrm{Spur}A.$$

c) Es sei die folgende Matrix $A \in M^{\mathbb{C}}_{3\times 3}$ gegeben:

$$A = \begin{pmatrix} -41 & -96 & 440 \\ -17 & 83 & 55 \\ -34 & -24 & 205 \end{pmatrix}$$

Sarah und Tobias haben die Eigenwerte von A untersucht. Beide haben herausgefunden, dass A diagonalisierbar ist und 95 und 57 die einzigen Eigenwerte von A sind. Sie sind sich jedoch uneinig über die algebraischen Vielfachheiten: Sarah hat herausbekommen, dass 95 die algebraische Vielfachheit 2 hat und 57 die Vielfachheit 1. Bei Tobias ist es genau umgekehrt. Wer hat Recht?

3. Aufgabe (7 Punkte)

Wir denken uns ein Atom, das sich in einem Grundzustand g und einem angeregten Zustand a befinden kann, mit den zugehörigen Gesamtenergien E_g bzw. E_a (es gilt $E_g < E_a$). Der Quantenmechanik zufolge ist der Zustand des Atoms zur Zeit t durch eine "Wellenfunktion" $\begin{pmatrix} \Psi_1(t) \\ \Psi_2(t) \end{pmatrix} = \Psi(t) \in \mathbb{C}^2$ gegeben, der sich gemäß der *Schrödingergleichung*

$$\mathrm{i}\hbar \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\Psi(t) = H\Psi(t) \tag{1}$$

entwickelt (wir setzen $\hbar = 1$). Hierbei ist H (der *Hamilton-Operator*) eine symmetrische Matrix, bei uns $H := \begin{pmatrix} E_g & \Delta \\ \Delta & E_a \end{pmatrix}$ mit einer "Störung" $\Delta > 0$.

a) Sei A eine symmetrische Matrix und S eine unitäre Matrix, so dass $D := SAS^*$ diagonal ist. Zeige durch vollständige Induktion, dass $A^n = S^* D^n S$ für alle $n \in \mathbb{N}$ gilt. Was steht in D bzw. D^n?

b) Sei $\langle V, (\cdot,\cdot)\rangle$ ein unitärer Vektorraum und $T \in L(V,V)$ symmetrisch. Wir können also schreiben: $T := \sum_{k=1}^r \lambda_k P_k$ mit $\lambda_1, .., \lambda_r \in \mathbb{R}$ und $P_1, .., P_r$ orthogonale Projektoren, $P_j P_k = \delta_{jk} P_j$. Die Exponentialfunktion von T ist definiert als $\exp(T) := \sum_{k=1}^r \exp(\lambda_k) P_k$.

Sei $B \in M_{n\times n}^{\mathbb{C}}$ symmetrisch. Fasst man B als symmetrische Abbildung in $\mathbb{C}^n$, versehen mit dem Standardskalarprodukt, auf, so wird durch die obige Vorschrift also $\exp(B)$ definiert.

Seien nun $\lambda_1, \lambda_2 \in \mathbb{R}$, $D \in M_{n\times n}^{\mathbb{C}}$ diagonal, $S \in M_{n\times n}^{\mathbb{C}}$ unitär, und $A = S^* D S$ symmetrisch. Zeige:

$$\exp\begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 \\ 0 & \lambda_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} e^{\lambda_1} & 0 \\ 0 & e^{\lambda_2} \end{pmatrix}, \quad e^A = S^* e^D S.$$

c) Sei nun $\Delta = 0$ und $\Psi(0) = \begin{pmatrix} 3/5 \\ 4/5 \end{pmatrix}$. Gleichung (1) kann nun mit Hilfe des Ansatzes $\Psi(t) = \exp(-\mathrm{i}tH)\Psi(0)$ gelöst werden. Dabei ist $\exp(-\mathrm{i}tH) = \sum_{k=1}^r \exp(-\mathrm{i}t\lambda_k) P_k$, wobei wieder $H = \sum_{j=1}^r \lambda_j P_j$ und $P_1, ..., P_r$ orthogonale Projektoren wie in b).

Laut Quantenmechanik ist die Wahrscheinlichkeit, das System zum Zeitpunkt t im Zustand $\Psi(0)$ zu messen, gleich $|\big(\Psi(0), \Psi(t)\big)|^2$. Berechne und skizziere diese!

4. Aufgabe (4 Punkte)

Für zwei Mengen $A, B \subset \mathbb{R}^n$ ist der Abstand zwischen A und B definiert durch

$$\operatorname{dist}(A,B) := \inf\{|a-b| \mid a \in A, b \in B\}.$$

a) Finde zwei beschränkte, nichtleere Mengen A und B mit der Eigenschaft

$$A \cap B = \emptyset \text{ und } \operatorname{dist}(A,B) = 0. \tag{2}$$

b) Finde zwei abgeschlossene, nichtleere Mengen A, B, die (2) erfüllen.