TU Berlin
Mathematik III für Physiker

WS 2007/08
Wüst/Jansen/Möws/Witte

5. Übungsblatt

(Abgabe: bis Mi. 28. November, 12:15 Uhr, Briefkasten MA 728)

---

1. Aufgabe (5 Punkte)

Sei $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ gegeben durch

$$f(x,y) := \begin{cases} \frac{x^2}{x+y}, & \text{für } x+y \neq 0, \\ 0, & \text{sonst.} \end{cases}$$

Seien N_1, N_2 die Niveaulinien von f zu den Werten $1, 2$, d.h.

$$N_1 := \{\langle x,y\rangle \in \mathbb{R}^2 \mid f(x,y) = 1\}, \quad N_2 := \{\langle x,y\rangle \in \mathbb{R}^2 \mid f(x,y) = 2\}.$$

a) Zeige, dass $N_1 = \{\langle x,y\rangle \in \mathbb{R}^2 \mid y = (x-\frac{1}{2})^2 - \frac{1}{4}\} \backslash \{0\}$. Bestimme auch N_2. Skizziere N_1 und N_2.

b) Zeige, dass 0 ein Randpunkt sowohl von N_1 als auch von N_2 ist, d.h. $0 \in \partial N_1 \cap \partial N_2$.

c) Ist f bei 0 stetig? Begründe Deine Antwort.

2. Aufgabe (6 Punkte)

a) Sei $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^2$, $f(x) := \begin{pmatrix} x_1 x_3 \\ x_2^3 \end{pmatrix}$. Sei $A(x) := \begin{pmatrix} x_3 & 0 & x_1 \\ 0 & 3x_2^2 & 0 \end{pmatrix}$. Zeige $\mathrm{D}f(x) = A(x)$ durch Nachweis von $f(x+u) - \big(f(x) + A(x)u\big) = o(|u|) \quad (u \to 0)$.

b) Sei $g : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$, $g(x) := \cos x_1 + x_2^3$. Bestimme $\mathrm{D}g(x)$.

c) Sei $h : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^2$, $h(x) := \begin{pmatrix} x \\ -x^2 \end{pmatrix}$. Bestimme $\mathrm{D}h(x)$.

3. Aufgabe (6 Punkte)

Sei $n \in \mathbb{N}$ eine beliebige natürliche Zahl. In dieser Aufgabe soll gezeigt werden, dass alle Normen auf $\mathbb{R}^n$ äquivalent sind. Zeige dazu:

a) Die euklidische Norm $|\cdot|$ und die Maximumsnorm $||\cdot||_\infty$, gegeben durch

$$|x| := \sqrt{\sum_{j=1}^{n} x_j^2}, \quad ||x||_\infty := \max\{|x_1|, ..., |x_n|\}$$

für alle $x = \langle x_1, ..., x_n\rangle$, sind äquivalent.

b) Die Menge $K := \{y \in \mathbb{R}^n \mid ||y||_\infty = 1\}$ ist eine kompakte Menge.

c) Jede Norm $||\cdot||$ auf $\mathbb{R}^n$ ist äquivalent zur Maximumsnorm.

Es darf verwendet werden, dass

1. eine stetige Funktion $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ auf einem Kompaktum immer ein Maximum und ein Minimum besitzt,
2. jede Norm auf $\mathbb{R}^n$ eine stetige Funktion von $\mathbb{R}^n$ nach $\mathbb{R}$ ist.

4. Aufgabe (3 Punkte)

a) Zeige oder widerlege durch ein Gegenbeispiel die folgende Aussage: "Die Vereinigung zweier beliebiger Gebiete ist stets wieder ein Gebiet."

b) Seien $G_1, G_2 \subset \mathbb{R}^n$ zwei Gebiete mit $G_1 \cap G_2 \neq \emptyset$. Zeige, dass $G_1 \cup G_2$ auch ein Gebiet ist.