6. Übungsblatt

(Abgabe: bis Mi. 5. Dezember, 12:15 Uhr, Briefkasten MA 728)

---

1. Aufgabe (3 Punkte)

Bestimme die Funktionalmatrizen der folgenden Abbildungen:

a) $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$, $f(x) := x_3^3 - \frac{5}{1+(x_1x_2)^2}$.

b) $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^3$, $g(x) := \begin{pmatrix} \cos x \\ 8x \\ e^{-x} \end{pmatrix}$.

c) $h : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$, $h(x) := \begin{pmatrix} 5x_2 - e^{x_1x_2} \\ \ln(1 + x_1^2 + x_2^2) \end{pmatrix}$.

2. Aufgabe (3 Punkte)

Gegeben sei die Funktion $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ mit

$$f(x) := \begin{cases} \frac{x_1^2 x_2}{x_1^4 + x_2^2}, & \text{für } x \neq 0, \\ 0 & \text{sonst.} \end{cases}$$

Zeige, dass f in 0 zwar partiell differenzierbar, aber nicht stetig ist.

3. Aufgabe (3 Punkte)

a) Seien $f, g \in C^1(\mathbb{R}^2)$ und $x_0 \in \mathbb{R}^2$. Sei $h : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$, $h(x) := \begin{pmatrix} f(x) \\ g(x) \end{pmatrix}$. Angenommen,

$$Df(x_0) = \begin{pmatrix} 1 & 2 \end{pmatrix}, \quad Dg(x_0) = \begin{pmatrix} 3 & 4 \end{pmatrix}.$$

Was ist dann $Dh(x_0)$? Wie hängen allgemein für $f \in C^1(\mathbb{R}^m, \mathbb{R}^n)$ die Ableitung von f und die Ableitungen der Koordinatenfunktionen zusammen?

b) Sei $f \in C^1(\mathbb{R}^2, \mathbb{R}^2)$. Seien $\boldsymbol{e}_1 := \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$, $\boldsymbol{e}_2 := \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$. Sei $x_0 \in \mathbb{R}^2$. Für $u \in \mathbb{R}^2$ ist die Richtungsableitung $D_{\boldsymbol{e}_1} f(x_0)$ die Ableitung der Abbildung $t \mapsto f(x_0 + t\boldsymbol{e}_1)$ von $\mathbb{R}$ nach $\mathbb{R}^n$ an der Stelle $t = 0$. Angenommen, die Richtungsableitungen in die Richtungen $\boldsymbol{e}_1$ und $\boldsymbol{e}_2$ sind

$$D_{\boldsymbol{e}_1} f(x_0) = \begin{pmatrix} -7 \\ 9 \end{pmatrix}, \quad D_{\boldsymbol{e}_2} f(x_0) = \begin{pmatrix} 0 \\ 3 \end{pmatrix}.$$

Was ist dann $Df(x_0)$?

4. Aufgabe (4 Punkte)

Sei $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$, $f(x) := 2x_1^2 + 6x_2^2$. Bestimme

$$m := \min\{(D_u f)(1,1) \mid u \in \mathbb{R}^2,\ |u| = 1\}.$$

Zeige, dass es genau einen Vektor $v \in \mathbb{R}^2$ mit $|v| = 1$ und $D_v f(1,1) = m$ gibt, und bestimme diesen Vektor.

5. Aufgabe (7 Punkte)

Sei $G_1 := \{x \in \mathbb{R}^2 \mid x_1 > 0\}$ und $G_2 := \{\langle \rho, \psi \rangle \mid \rho > 0, \psi \in (-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2})\}$.

a) Zeige, dass für $x \in G_1$ und $\langle \rho, \psi \rangle \in G_2$ gilt:

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \rho\cos\psi \\ \rho\sin\psi \end{pmatrix} \Leftrightarrow \begin{pmatrix} \rho \\ \psi \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \sqrt{x_1^2 + x_2^2} \\ \arctan\frac{x_2}{x_1} \end{pmatrix}.$$

b) Sei $h : G_1 \to G_2$ definiert durch

$$h(x) := \begin{pmatrix} r(x) \\ \phi(x) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \sqrt{x_1^2 + x_2^2} \\ \arctan\frac{x_2}{x_1} \end{pmatrix} \quad (x \in G_1).$$

Zeige, dass

$$Dh(x) = \begin{pmatrix} \cos\phi(x) & \sin\phi(x) \\ -\frac{\sin\phi(x)}{r(x)} & \frac{\cos\phi(x)}{r(x)} \end{pmatrix} \quad (x \in G_1).$$

c) Sei $g \in C^1(G_2)$ und $f := g \circ h$, also $f(x) = g(r(x), \phi(x))$. Sei

$$\boldsymbol{e}_r(x) := \begin{pmatrix} \cos\phi(x) \\ \sin\phi(x) \end{pmatrix},\ \boldsymbol{e}_\phi(x) := \begin{pmatrix} -\sin\phi(x) \\ \cos\phi(x) \end{pmatrix} \ (x \in G_1).$$

Zeige, dass f differenzierbar ist. Wie müssen $a(x)$ und $b(x)$ definiert sein, damit

$$\nabla f(x) = a(x)\boldsymbol{e}_r(x) + b(x)\boldsymbol{e}_\phi(x) \quad (x \in G_1)$$

gilt? Hierbei soll $\nabla f(x)$ als Spaltenvektor aufgefasst werden, d.h. $\nabla f = \begin{pmatrix} D_1 f \\ D_2 f \end{pmatrix}$.

d) Sei $f : G_1 \to \mathbb{R}$, $f(x) := \frac{\cos\phi(x)}{(r(x))^2}$ $(x \in G_1)$. Zeige, dass in G_1 gilt

$$\nabla f = -\frac{2\cos\phi}{r^3}\,\boldsymbol{e}_r - \frac{\sin\phi}{r^3}\,\boldsymbol{e}_\phi.$$