7. Übungsblatt

(Abgabe: bis Mi. 12. Dezember, 12:15 Uhr, Briefkasten MA 728)

---

1. Aufgabe (4 Punkte)

Sei $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$,

$$f(x) := \begin{pmatrix} f_1(x) \\ f_2(x) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_1^2 \\ x_2^3 \end{pmatrix}.$$

Seien $x := \langle 0, 0 \rangle$, $y := \langle 1, 1 \rangle$. Zeige:

a) Es existieren $\tau_1, \tau_2 \in [0, 1]$, so dass

$$f_1(y) - f_1(x) = Df_1(x + \tau_1(y - x))(y - x),$$
$$f_2(y) - f_2(x) = Df_2(x + \tau_2(y - x))(y - x).$$

b) Es gibt jedoch kein $\tau \in [0, 1]$, so dass

$$f(y) - f(x) = Df(x + \tau(y - x))(y - x).$$

2. Aufgabe (7 Punkte)

Sei $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$,

$$f(x_1, x_2) := \begin{cases} \frac{2x_1^3 x_2}{x_1^2 + x_2^2} - x_1 x_2, & x \neq 0, \\ 0, & x = 0. \end{cases}$$

a) Zeige, dass f überall (also insbesondere im Ursprung) differenzierbar ist, und gib die Ableitung $Df(x)$ an.

b) Zeige, dass f überall in $\mathbb{R}^2$ zweimal partiell differenzierbar ist, dass aber $D_1 D_2 f(0) \neq D_2 D_1 f(0)$.

c) Gib eine möglichst einfache Begründung dafür, dass $D_1 D_2 f(x) = D_2 D_1 f(x)$ für alle $x \neq 0$.

3. Aufgabe (6 Punkte)

Sei $A \in M_{n\times n}^{\mathbb{R}}$ und $(\cdot, \cdot)$ das Standardskalarprodukt auf dem $\mathbb{R}^n$, und die Funktion $g : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ sei definiert durch

$$g(x) := (x, Ax) \quad (x \in \mathbb{R}^n).$$

a) Berechne $Dg(x)$, $\nabla g(x)$ und die zweite Ableitung $D^{(2)}g(x)$.

b) Was ergibt sich für den Spezialfall, dass A symmetrisch ist?

4. Aufgabe (3 Punkte)

Sei $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ mit

$$f(x) := e^{x_1} \cos x_2.$$

Berechne das Taylorpolynom p vom Grad 2 von f bei $x = 0$.