8. Übungsblatt

(Abgabe: bis Mi. 19. Dezember, 12:15 Uhr, Briefkasten MA 728)

---

1. Aufgabe (3 Punkte)

Wir betrachten den Einheitskreis im $\mathbb{R}^2$ und ein einbeschriebenes Dreieck, dessen Eckpunkte durch $\langle 1,0\rangle$, $\langle \cos\theta, \sin\theta\rangle$ und $\langle \cos\phi, \sin\phi\rangle$ gegeben sind. Dessen Flächeninhalt (mit Vorzeichen) lautet

$$F(\theta,\phi) = \frac{1}{2}\det\begin{pmatrix} 1-\cos\theta & \sin\theta \\ 1-\cos\phi & \sin\phi \end{pmatrix}.$$

Für welche Winkel hat der Flächeninhalt ein lokales Maximum bzw. Minimum? Skizze und geometrische Interpretation!

2. Aufgabe (3 Punkte)

Welche der folgenden Matrizen sind positiv bzw. negativ (semi-)definit oder indefinit? Kurze Begründung!

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -2 & 0 \\ -2 & -1 & 5 \\ 0 & 5 & 0 \end{pmatrix},\ B = \begin{pmatrix} -3 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{pmatrix},\ C = \begin{pmatrix} 2 & 2 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}.$$

3. Aufgabe (7 Punkte)

Sei $B \in M^{\mathbb{R}}_{n\times n}$ eine symmetrische Matrix, und es sei

$$\mathcal{S} := \{u \in \mathbb{R}^n \mid \frac{1}{2} \leq ||u|| \leq 2\}.$$

sowie $f : \mathcal{S} \to \mathbb{R}$ gegeben durch $f(u) := (u, Bu)/(u,u)$. Hierbei bezeichnet $(\cdot,\cdot)$ das Standardskalarprodukt im $\mathbb{R}^n$.

a) Zeige, dass für $\Lambda := \sup_{u\in\mathcal{S}} f(u)$ auch geschrieben werden kann

$$\Lambda = \max_{u\in\mathcal{S}} f(u) = \max_{||u||=1} f(u).$$

Das Maximum wird also tatsächlich angenommen, und zwar sogar im Inneren $\overset{\circ}{\mathcal{S}}$.

b) Zeige, dass Λ ein Eigenwert von B ist, und zwar der größte. Zeige weiterhin: Ist $\Lambda = f(u_0)$ mit einem u_0 im Inneren von $\mathcal{S}$, so ist u_0 ein zugehöriger Eigenvektor.

c) Folgere, dass eine symmetrische Matrix genau dann positiv definit ist, wenn alle Eigenwerte positiv sind. Tipp: Betrachte die Matrix $(-B)$.

4. Aufgabe (7 Punkte)

Thema dieser Aufgabe ist der Satz über die lokale Umkehrbarkeit von Abbildungen (Wüst Satz 17.19).

a) Die Funktion $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ sei gegeben durch

$$f(x_1, x_2) := \langle x_1^3 + 2x_1x_2 + x_2^2, x_1^2 + x_2 \rangle.$$

Zeige, dass f in einer Umgebung von $\langle 1, 1 \rangle$ invertierbar ist, und bestimme die Ableitung der lokalen Inversen am Punkt $f(1, 1) = \langle 4, 2 \rangle$.

b) Wir schreiben den 25.Dezember 2006. Anna freut sich ""ueber 30 cm Neuschnee in ihrem Garten und beschließt, einen Schneemann zu bauen. In stundenlanger Arbeit erschafft sie ein wahres Kunstwerk, was ihre Freundin Lina aber neidisch macht: voller Wut holt Lina die große, stetig differenzierbare Walze $W : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^2$ (nicht unbedingt linear!) aus der Garage und fährt den Schneemann platt, bis nur noch ein Fleck am Boden übrig bleibt.

Anna ärgert sich natürlich und würde das Attentat von Lina gern rückgängig machen, indem sie die inverse Walze $W^{-1} : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^3$ anwendet und den ursprünglichen Schneemann wiederherstellt. Zeige, dass Anna Pech hat: W kann nicht injektiv sein und ist also nicht umkehrbar.