TU Berlin WS 2007/08
Mathematik III für Physiker Wüst/Jansen/Möws/Witte

9. Übungsblatt

(Abgabe: bis Mi. 9. Januar, 12:15 Uhr, Briefkasten MA 728)

---

1. Aufgabe (5 Punkte)

Seien $f, \phi : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ definiert durch

$$f(x,y) := x + y, \quad \phi(x,y) := x^2 + y^2 - 2 \quad (\langle x,y\rangle \in \mathbb{R}^2).$$

a) Skizziere die Niveaulinie von ϕ zum Wert 0, d.h. die Menge

$$N_0(\phi) := \{\langle x,y\rangle \in \mathbb{R}^2 \mid \phi(x,y) = 0\}.$$

Die Niveaulinien von f, $N_c(f)$, $c \in \mathbb{R}$, sind Geraden. Für welche $c \in \mathbb{R}$ berührt die Gerade $N_c(f)$ die Niveaulinie $N_0(\phi)$ tangential?

b) Bestimme mit Hilfe des Satzes aus der Vorlesung die Extrema von f unter der Nebenbedingung $\phi(x,y) = 0$.

c) Vergleiche die Ergebnisse aus a) und b).

2. Aufgabe (5 Punkte)

Sei $f \in C^1(\mathbb{R}^3)$ so, dass

$$\mathrm{D}_1 f(x) \neq 0, \ \mathrm{D}_2 f(x) \neq 0, \ \mathrm{D}_3 f(x) \neq 0, \ (x \in \mathbb{R}^3).$$

Sei $x^0 \in \mathbb{R}^3$ mit $f(x^0) = 0$.

a) Zeige: es existieren $U \subset \mathbb{R}^2$ und eine Abbildung $h_1 \in C^1(U)$, so dass gilt:

(i) U ist eine offene Umgebung von $\langle x_2^0, x_3^0\rangle$

(ii) $f\big(h_1(x_2,x_3), x_2, x_3\big) = 0$ $(\langle x_2, x_3\rangle \in U)$.

Definiere

$$\left.\frac{\partial x_1}{\partial x_2}\right|_{x_3} := \frac{\partial h_1}{\partial x_2}(x_2^0, x_3^0) = (\mathrm{D}_1 h_1)(x_2^0, x_3^0)$$

(in etwas unsauberer Sprechweise: „partielle Ableitung von x_1 nach x_2 bei festgehaltenem x_3" – diese Notation wird oft in der Thermodynamik verwendet). Zeige:

$$\left.\frac{\partial x_1}{\partial x_2}\right|_{x_3} = -\frac{\mathrm{D}_2 f(x^0)}{\mathrm{D}_1 f(x^0)}.$$

b) Man definiert ganz ähnlich wie in a) $\left.\frac{\partial x_2}{\partial x_3}\right|_{x_1}$, $\left.\frac{\partial x_3}{\partial x_1}\right|_{x_2}$ Zeige:

$$\left.\frac{\partial x_1}{\partial x_2}\right|_{x_3} \left.\frac{\partial x_2}{\partial x_3}\right|_{x_1} \left.\frac{\partial x_3}{\partial x_1}\right|_{x_2} = -1.$$

3. Aufgabe (5 Punkte)

Wir betrachten ein physikalisches System, das sich in n verschiedenen Energieniveaus $0 < E_1 < E_2 < ... < E_n$, $E_1, ..., E_n \in \mathbb{R}$, befinden kann. Wir nehmen an, dass sich das System mit Wahrscheinlichkeit w_i im Niveau zu der Energie E_i befindet. Damit $w = \langle w_1, ..., w_n \rangle$ tatsächlich eine Wahrscheinlichkeitsverteilung definiert, muss $w \in [0, \infty)^n$ und $\sum_{i=1}^n w_i = 1$ gelten. Der Erwartungswert $\bar{E}$ der Energie ist dann $\bar{E} := \sum_{i=1}^n w_i E_i$. Die Shannon-Entropie ist

$$H(w) := -\sum_{i=1}^{n} w_i \log w_i,$$

wobei $0 \log 0 := 0$. Wir betrachten nun den Erwartungswert $\bar{E}$ als bekannt und fragen uns, für welche Wahrscheinlichkeitsverteilung die Entropie maximal wird. Beantworte hierzu die folgenden Fragen:

a) Sei $\Phi_1(w) := \sum_{i=1}^n w_i - 1$ und $\Phi_2(w) := \sum_{i=1}^n w_i E_i - \bar{E}$. Sei $M := \{w \in [0, \infty)^n \mid \Phi_1(w) = \Phi_2(w) = 0\}$. Wieso hat H auf M mindestens ein lokales Maximum?

b) Wir nehmen an, dass H sein Maximum auf M in $M \cap (0, \infty)^n$ annimmt. (Tatsächlich kann man zeigen, dass dies für $\bar{E} \in (E_1, E_n)$ der Fall ist.) Sei $w^{\max}$ eine Stelle, in der dieses Maximum erreicht wird. Zeige, dass Konstanten $\beta, z \in \mathbb{R}$ existieren mit $w_i^{\max} = \exp(-\beta E_i)/z$. Bestimme z mit Hilfe von $\Phi_1(w^{\max}) = 0$ (z heißt *Zustandssumme*). Wie könnte man noch β bestimmen?

4. Aufgabe (5 Punkte)

Für $\langle x, y, u, v \rangle \in \mathbb{R}^4$ sei folgendes Gleichungssystem gegeben:

$$\begin{aligned} u + \cos(uv) &= vx + 1, \\ \sin u &= y + v, \end{aligned}$$

a) Zeige, dass ein Gleichungssystem in einer Umgebung von $\langle x, y, u, v \rangle = \langle 0, 0, 0, 0 \rangle$ stetig differenzierbar nach $\langle u, v \rangle$ aufgelöst werden kann, d.h. dass es eine Umgebung U von $\langle 0, 0 \rangle$ und eine C^1-Funktion h gibt, so dass für $\langle x, y \rangle \in U$ und $\langle u, v \rangle = h(x, y)$ das Tupel $\langle u, v, x, y \rangle$ das Gleichungssystem erfüllt.

b) Bestimme die Ableitung von h an der Stelle $\langle 0, 0 \rangle$ (ohne h auszurechnen!).

c) Für welche Punkte $\langle x, y, u, v \rangle \in \mathbb{R}^4$ lässt sich das Gleichungssystem mit Hilfe des Satzes aus der Vorlesung lokal auflösen? Hierbei ist nicht unbedingt Auflösung nach $\langle u, v \rangle$ gemeint, Auflösung nach anderen Variablenpaaren ist ebenfalls ok.

(*Tipp*: man überlege sich, wann die Matrix eine invertierbare 2×2-Teilmatrix besitzt.)