

Semesterüberblick

ANALYSIS VON FUNKTIONEN EINER VARIABLEN

Kap. 6.8 Uneigentliche Integration

- $R_{\text{loc}}((a, b))$, uneigentliches Integral / Konvergenz bzw. Existenz eines uneig. Integrals
- Vergleichskriterien, Vergleichsintegrale
- Cauchy-Kriterium für Grenzwerte von Funktionen
- nichtnegative Treppenfkt auf $[0, \infty)$: Konvergenz des Integrals vs. Konvergenz einer Reihe (Wüst Satz 6.27)

Kap. 7 Limesvertauschungen

Grundbegriffe:

- Funktionenfolge, Funktionenschar, Funktionenreihe
- Konvergenzarten: punktweise, gleichmäßig, lokal gleichmäßig, für Reihen: absolut gleichmäßig
- Supremumsnorm

Sätze: hinreichende Kriterien für...

- wann darf man Grenzwertbildung (z.B. $x \rightarrow a, n \rightarrow \infty$) vertauschen?
- wann ist die Grenzfkt stetiger Fkt stetig?
- wann ist die Grenzfkt diff'barer Fkt diff'bar? darf man Differenzierbarkeit und Limesbildung vertauschen?
- wann ist die Grenzfkt integrierbarer Fkt integrierbar? Limes der Integrale = Integral der Grenzfunktion? Achtung: Sätze für eigentliche und uneigentliche Riemann-Integrale!

Wichtiges Beispiel: Potenzreihen!

LINEARE ALGEBRA

Kap. 15 Eigenwerte linearer Abbildungen und Matrizen

Grundbegriffe:

- Eigenwert, Eigenvektor, Eigenraum (von lin. Abb./von Matr.)

- charakteristisches Polynom einer lin. Abb. / einer Matrix
- geometrische Vielfachheit, algebraische Vielfachheit
- symmetrische Abbildung/Matrix, Projektion (Def. + Anschauung)

Sätze:

- Eigenschaften des charakteristisches Polynoms, Zusammenhang mit Eigenwerten / Vielfachheiten..
- wie stehen i.A. alg. / geom. Vf. zueinander? bei diagonalisierbaren Abb.?
- Diagonalisierung symmetrischer Matrizen / Abb.: Formulierung über ONB aus Eigenvektoren, $A = SDS^*$, Spektralsatz $A = \sum \lambda_i P_i$.
- Eigenschaften von Projektionen

ANALYSIS VON FUNKTIONEN MEHRERER VARIABLEN

Kap. 16 Abbildungen aus dem \mathbb{R}^m in den \mathbb{R}^n

- verschiedene Normen – euklidische Norm, Supremumsnorm..., Äquivalenz von Normen
- zusammenhängende Menge, Gebiet
- Übertragung von Begriffen aus 1 Dim.: offen, abgeschlossen, kompakt, Konvergenz von Folgen usw.
- Abstand zwischen zwei Mengen; wenn A kompakt u. B abgeschlossen, dann $A \cap B = \emptyset \Rightarrow \text{dist}(A, B) > 0$ (wichtige Anwendung: $A = K \subset G$, G offen, $B = \text{Rand von } G$).
- Heine-Borel
- Grenzwerte und Stetigkeit von Funktionen

Kap. 17 Differentiation bei Abbildungen aus dem \mathbb{R}^m in den \mathbb{R}^n

- o -Notation, O -Notation
- Def. der Diff'barkeit, Ableitung, Funktionalmatrix, partielle Ableitungen erster Ordnung und höherer Ordnung, Richtungsableitung, Gradient, Hesse-Matrix
- Differential ℓ -ter Ordnung

Wichtiges Bsp: Ableitung einer linearen Abbildung?

Sätze

- Zusammenhang zwischen Stetigkeit, Differenzierbarkeit, partieller Differenzierbarkeit
- wann ist $D_1 D_2 f = D_2 D_1 f$?
- Kettenregel
- Zusammenhang zwischen Gradient u. Richtungsableitung

- Mittelwertsatz
- Taylorformel

Wichtiger Spezialfall: Taylorformel zweiter Ordnung für $f \in C^2(G)$

$$f(x_0 + u) = f(x_0) + (\nabla f(x_0), u) + \frac{1}{2}(u, H_f(x_0)u) + O(|u|^2) \quad (u \rightarrow 0).$$

Bestimmung von Extrema:

- lokales Extremum, globales Extr., Extremum unter NB
- hinreichende / notwendige Kriterien für lokale Extrema (ohne NB)
- Matrizen: positiv definit, semidefinit, indefinit...
- notw. Krit. für lokale Extrema unter NB: Lagrange

Umkehrabbildungen (Satz 17.19) und implizite Funktionen (Sätze 17.20 und 17.21)

Kap. 18 Kurvenintegrale

- Wege – geschlossene, doppelpunktfreie Wege, Spur eines Weges, C^k , stückweise- C^k -Wege, (stückweise) reguläre Wege, Anfangs- u. Endpunkt
- Äquivalenz von Wegen, Kurven, Darstellung einer Kurve
- reguläre Kurve, reguläre Darstellung
- Notation $K_1 + K_2$, $-K$
- Länge von stückweise reg. Kurven, Bogenlängenparametrisierung
- Kurvenintegral
- konservative Felder, Potentialfelder, wirbelfreie Felder; Potential; Rotation (Rot), Wirbeldichte (rot)
- einfach zusammenhängendes Gebiet (Anschauung), (polygonzusammenhängende, sternförmige Gebiete) konvexe Mengen

Sätze:

- (Hilfssatz: Umparametrisierung zwischen zwei regulären Darstellungen einer regulären Kurve ist C^1)
- Zusammenhang zwischen Potentialfeldern und konservativen Feldern, Berechnung von Potentialen und Kurvenintegralen bei konservativen Feldern
- konservativ \Rightarrow wirbelfrei, Umkehrung nur unter Zusatzvoraussetzung (welche?)

Wichtiges Bsp zu wirbelfrei aber nicht konservativ: $\langle \frac{-x_2}{x_1^2+x_2^2}, \frac{x_1}{x_1^2+x_2^2} \rangle$ in $\mathbb{R}^2 \setminus \{0\}$

Kap. 19 Integration im \mathbb{R}^n

Begriffe:

- Quader, einfache Funktionen, Oberintegral, Unterintegral, Riemannintegral über Quader;
- Jordan-Nullmenge, Jordan-Bereich
- Riemann-Integral über Jordan-Bereich
- Ausschöpfung, uneigentliches Riemann-Integral, $R_{\text{loc}}(G)$, absolute Integrierbarkeit

Sätze:

- Rechenregeln für das Riemannintegral (Quader u. Jordan-Bereiche)
- Fubini, iterierte Integrale
- Kriterien für Jordan-Nullmengen
- hinreichendes Kriterium für $f \in R(Q)$; Abändern einer Funktion auf einer Jordan-Nullmenge ändert das Integral nicht
- Vergleichskriterien u. -Integrale für uneigentliche Integrale
- Transformationsformel (Bsp.: Polar- und Kugelkoordinaten), Integrale über Fkt von $|x|$

Vertauschung von Integration mit Grenzwertbildung u. Differentiation

Kap. 20 Oberflächenintegrale

(nicht rücksprachenrelevant, aber wichtig für die Physik & die Prüfung!)

- reguläre Flächen als Äquivalenzklassen: 2 Unterarten:
 - offene reguläre Hyperfläche
 - reguläres Hyperflächenstück (mit Rand u. bei Forderungen an Abb. werden Jordan-Nm. herausgenommen)

dazu reguläre Darstellung/Parametrisierung

- Flächeninhalt, Oberflächenintegral
- Normalenfeld
- Fluss eines Feldes durch ein Flächenstück, Orientierung
- man kann über Kugel integrieren, indem man zuerst über Oberflächen von Kugeln verschiedener Radien und dann über die Radien integriert