Zusatzaufgaben

(Abgabe: bis Mi. 16. Januar, 12:15 Uhr, Briefkasten MA 728)

Die Abgabe dieser Aufgaben ist freiwillig. Ihr könnt damit Euren Punktestand aufbessern, die Mindestpunktezahl für das Semester bleibt bei 60% der Gesamtpunkte auf die Pflichtaufgaben.

1. Aufgabe (3 Punkte)

Befindet sich am Ort $x \in \mathbb{R}^3$ eine Punktladung, so sieht ein Beobachter am Ort $y \in \mathbb{R}^3$ ein Potential $\Phi_y(x)$, gegeben durch

$$\Phi_y(x) := \frac{1}{|y-x|}.$$

Wir betrachten die Position y des Beobachters als fest gewählt und die Position der Ladung x als variabel. Zeige, dass für $y \neq 0$ und geeignete y-abhängige $Q_{jk} \in \mathbb{R}$

$$\Phi_y(x) = \frac{1}{|y|} + \frac{(x,y)}{|y|^3} + \frac{1}{2}\sum_{j,k=1}^{3} \frac{Q_{jk}x_j x_k}{|y|^5} + o(|x|^2) \quad (x \to 0)$$

und bestimme $Q_{jk},\ 1 \leq j,k \leq 3$.

2. Aufgabe (4 Punkte)

Seien $a^{(1)}, ..., a^{(p)}$ Punkte im $\mathbb{R}^n$. Zeige, dass der mittlere Quadratabstand

$$f(x) := \frac{1}{p}\sum_{k=1}^{p} |x - a^{(k)}|^2$$

des Punktes $x \in \mathbb{R}^n$ zu der Punktewolke $a^{(1)}, ..., a^{(p)}$ sein globales (!) Minimum in deren Mittelpunkt

$$x = \frac{1}{p}\sum_{k=1}^{p} a^{(k)}$$

annimmt.

3. Aufgabe (3 Punkte)

Bestimme drei Zahlen $a, b, c \geq 0$ deren Summe gleich 60 und deren Produkt maximal ist.